

# Estudio de expresiones y métodos para el cálculo de la longitud de ola

## INTRODUCCIÓN

Dentro de los parámetros que caracterizan a la ola, la altura, el período y la longitud tienen un lugar cimerio. Según la Teoría Lineal del oleaje la expresión general para el cálculo de la longitud de la ola es trascendental, debido a que este parámetro aparece en ambos lados de la expresión. Sin embargo para Aguas someras y Aguas Profundas se pueden utilizar expresiones directas, debido a comportamientos específicos que conllevan a simplificaciones matemáticas de la expresión original.

Por su parte, para Aguas Transicionales es necesario recurrir a artificios matemáticos para su determinación, entre estos se encuentran tablas, gráficos, expresiones directas y métodos iterativos de aproximaciones sucesivas. En la literatura relacionada con el tema aparecen varias de estas expresiones directas, que por su sencillez, han sido de gran aplicación en los cálculos de ingeniería. Aunque a la hora de buscar precisión se recurre a los métodos iterativos.

En este trabajo se lleva a cabo un estudio sobre las distintas vías empleadas para el cálculo de la longitud de la ola. En este sentido, y de manera novedosa, se hace uso del análisis dimensional mediante el teorema Pi para obtener una expresión directa de la longitud de la ola en Aguas Transicionales.

## CONCEPTOS BÁSICOS

La velocidad a la cual se propaga una ola ( $C$ ) está estrechamente relacionada con el período ( $T$ ) y la longitud de la ola ( $L$ ) debido a que la distancia recorrida en un período es igual a la longitud de la ola. Esta relación se puede expresar por:

## Resumen / Abstract

*En este trabajo se lleva a cabo un estudio del análisis dimensional y se aplica el teorema Pi para obtener como resultado una expresión directa de la longitud de la ola y se compara con otras expresiones analíticas, así como también se obtiene una expresión que relaciona el error con el  $dx$  que se puede emplear en caso de aplicar un método gráfico, y por último, se realiza un análisis comparativo de los métodos iterativos.*

**Palabras Claves:** expresiones analíticas, longitud de la ola, métodos iterativos, teorema Pi.

*In this article a study of dimensional analysis is made and Pi theorem is applied to obtain an explicit expression to calculate wavelength which is compared with other analytical expressions. Also a formula is obtained to correlate errors with  $dx$  which can be used in case a graphic method is applied. Lastly, a comparative analysis between iterative methods is made.*

**Key Words:** analytical expressions, wavelength, iterative methods, Pi theorem.

$$C = \frac{L}{T} \quad \text{ec. 1}$$

Una expresión que relaciona la celeridad de la ola con la longitud de la ola y la profundidad (h) esta dada por:

$$C = \sqrt{\frac{g \cdot L}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)} \quad \text{ec. 2}$$

Esta ecuación es conocida como la relación de dispersión porque indica que existen olas con periodos diferentes que viajan a diferentes velocidades.

La ecuación 2 puede ser escrita también como:

$$C = \frac{g \cdot T}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad \text{ec. 3}$$

A partir de estas ecuaciones se puede obtener la expresión correspondiente para la longitud de la ola en función de la profundidad y el período:

$$L = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad \text{ec. 4}$$

Como se había mencionado anteriormente, el empleo de esta expresión presenta algunas dificultades debido a que L aparece en ambos miembros de la ecuación.

En la misma se puede observar que cuando el argumento de la función tanh ( $2\pi h/L$ ) se hace grande, esto ocurre a grandes profundidades, la tangente hiperbólica se aproxima a la unidad, y para valores pequeños del argumento, en profundidades cercanas a la costa, el valor de la función tiende al argumento. De ahí es que se establecen los términos de Aguas Profundas y Aguas Someras, estableciéndose los límites según se reporta en la Tabla 1.

Tabla 1. Clasificación de las olas (Tomado de CERC [1])

Clasificación	h/L	2πh/L	tanh(2πh/L)
Aguas Someras	0 - 1/20	0 - π/10	2πh/L
Aguas Transicionales	1/20 - 1/2	π/10 - π/10	tanh(2πh/L)
Aguas Profundas	1/2 - ∞	∞ - ∞	1

En algunas literaturas estas zonas se encuentran con otra nomenclatura, por ejemplo: profundidades reducidas, intermedias e indefinidas, respectivamente.

La condición de aguas profundas ocurre a grandes profundidades respecto la longitud, esto hace que las características de la ola no dependan de la profundidad y la función hiperbólica tiende a 1, la ecuación correspondiente se puede apreciar en la Tabla 2. Para h/L igual a 1/2 la tangente hiperbólica es 0.9964, que es muy próximo a 1, por lo que se establece este valor como límite. Cuando la profundidad relativa, h/L, se hace pequeña, menor que 1/20, la longitud de la ola se puede simplificar.

En otras palabras, cuando una ola generada por el viento

se traslada de Aguas Profundas a la playa, su celeridad y longitud son funciones del periodo (o la frecuencia); luego como la profundidad se hace mas pequeña en comparación con la longitud, la longitud y la celeridad dependen de la profundidad y el periodo, y finalmente las olas alcanzan un punto donde su longitud y celeridad dependen sólo de la profundidad, quedando establecidas las expresiones según las zonas como aparece en la Tabla 2.

Tabla 2. Fórmulas de Longitud de ola por Zona

Zona	Fórmula
Aguas Someras	$L = T\sqrt{gh}$ ec. 5
Aguas Profundas	$L = \frac{gT^2}{2\pi}$ ec. 6
Aguas Transicionales	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$ ec. 7

## ■ APLICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ANALÍTICAS

Dado que la expresión para el cálculo de la longitud de la ola es trascendente se han realizado varios estudios, para obtener de manera explícita ó directa el valor de la longitud de la ola y poder ser aplicado con fines ingenieriles.

Eckart [2] propuso una expresión que es suficientemente exacta para los cálculos de ingeniería.

$$L = L_o \sqrt{\tanh\left(\frac{2\pi h}{L_o}\right)} \quad \text{ec. 8}$$

Por otra parte, Hunt [3] propuso una solución aproximada a la ecuación de dispersión de la ola. Despejando la longitud de la ola queda:

$$L = \frac{L_o}{\sqrt{1 + \left[ \left( \frac{2\pi h}{L_o} \right) \cdot \left( 1 + \sum_{n=1}^6 D_n \left( \frac{2\pi h}{L_o} \right)^n \right) \right]^{-1}}} \quad \text{ec. 9}$$

donde:

$$\begin{aligned} D1 &= 0.6666666666; & D2 &= 0.3555555555; \\ D3 &= 0.1608465608; & D4 &= 0.0632098765; \\ D5 &= 0.0217540484; & D6 &= 0.0065407983. \end{aligned}$$

Nielsen [4] propuso dos soluciones explícitas para la ecuación de dispersión. Siendo la segunda de estas la que produce menor error relativo, siendo de 0.5% para koh < 2.5. La misma se obtuvo usando la expansión aproximada de Taylor. Despejando la Longitud de la ola se tiene:

$$L = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi h}{Lo} \left( 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{Lo} \right) + \frac{11}{360} \left( \frac{2\pi h}{Lo} \right)^2 \right)} & \text{para } kh \leq 2.37 \\ \frac{Lo}{1 + 2 \exp\left(-2 \left( \frac{2\pi h}{Lo} \right)\right)} & \text{para } kh > 2.37 \end{cases}$$

ec. 10

La aproximación de Fenton & McKee [5] es exacta en profundidades reducidas e indefinidas y en profundidades intermedias da resultados aceptables, por lo que se considera válida para aplicaciones ingenieriles.

$$L = Lo \left( \tanh \left( 2\pi \frac{\sqrt{\frac{h}{g}}}{T} \right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

ec. 11

Guo [6] ha obtenido una solución explícita simple para la ecuación de dispersión de la ola usando un método logarítmico. Esta ecuación es válida para cualquier profundidad. Despejando la Longitud de la ola:

$$L = \frac{ghT^2}{2\pi h \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{2\pi h}{T\sqrt{gh}} \right)^{2.5} \right) \right)^{-2/5}}$$

ec. 12

You [7] propone una expresión explícita para resolver la ecuación de dispersión, con la cual se obtiene un error relativo del 0.5%. Despejando la longitud de la ola de esta se tiene:

$$L = \begin{cases} \sqrt{koh} \left( 1 + \frac{1}{3}(koh) + \frac{4}{45}(koh)^2 + \frac{16}{945}(koh)^3 \right)^{0.5} & \text{para } kh \leq 1.94 \\ (koh) [1 + 2 \exp(-2koh)] & \text{para } kh > 1.94 \end{cases}$$

ec 13

### ■ APLICACIÓN DEL TEOREMA PI

Utilizando las facilidades que proporciona el teorema Pi de la mecánica de los fluidos Streeter [8] se pretende encontrar una expresión directa que permita calcular la longitud de la ola. Para ello se sigue el siguiente método:

1) *Escribir una relación funcional.* En este caso se quiere obtener una expresión para el cálculo de la longitud de ola.

$$L = f(g, h, T) \tag{ec 14}$$

Donde g es la aceleración de la gravedad en m/s<sup>2</sup>, h es

la profundidad en m y T es el periodo en s.

2) *Determinar el número de parámetros adimensionales (ó parámetros Pi).* Para ello cada variable la se expresa dimensionalmente:

$$\begin{aligned} L &= L \\ g &= LT^{-2} \\ h &= L \\ T &= T \end{aligned}$$

En donde se puede apreciar que existen 4 variables (L, g, h y T) y que entre ellas aparecen 2 dimensiones (L y T). El número de parámetros adimensionales se obtiene de la siguiente ecuación:

$$N = m - n \tag{ec. 15}$$

Siendo N la cantidad de parámetros Pi, m la cantidad de variables involucradas y n la cantidad de dimensiones involucradas. De esta forma, el problema tiene 2 parámetros Pi.

3) *Cálculo de los Parámetros Pi.* La relación funcional se expresa dimensionalmente, elevando las variables dependientes a coeficientes:

$$[L] = f([LT^{-2}]^X, [L]^Y, [T]^Z) \tag{ec. 16}$$

Como debe ser una ecuación dimensionalmente homogénea, el lado izquierdo de la igualdad tiene que tener la misma dimensión que el lado derecho de la igualdad:

$$[L] \quad 1 = X + Y$$

$$[T] \quad 0 = -2X + Z$$

Esto produce un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que se seleccionan 2 variables que se repiten en los diferentes parámetros Pi, y se ponen en función de las demás. En este caso se producen 3 variantes. Luego, se pueden encontrar los parámetros Pi teniendo en cuenta el Principio de Homogeneidad Dimensional y, obtener la fórmula que permite encaminar el experimento para obtener la expresión deseada. Esto se muestra en la Tabla 3.

Esto indica cómo se debe conducir el experimento. El mismo se lleva a cabo mediante un ajuste de curvas de una serie. Para el cual se debe contar con datos de periodos de la ola, profundidades locales y longitudes de ola.

Tabla 3. Variantes obtenidas con el Teorema Pi

Variante	Variables de repetición	1er Parámetro Pi	2do Parámetro Pi	Expresión resultante
1	g, T	$\pi_1 = \frac{L}{gT^2}$ ec.17	$\pi_2 = \frac{h}{gT^2}$ ec.18	$\frac{L}{gT^2} = f\left(\frac{h}{gT^2}\right)$ ec.19
2	h, T	$\pi_1 = \frac{L}{h}$ ec.20	$\pi_2 = \frac{gT^2}{h}$ ec.21	$\frac{L}{h} = f\left(\frac{gT^2}{h}\right)$ ec.22
3	g, h	$\pi_1 = \frac{L}{h}$ ec.23	$\pi_2 = T\sqrt{\frac{g}{h}}$ ec.24	$\frac{L}{h} = f\left(T\sqrt{\frac{g}{h}}\right)$ ec.25

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se prosigue con la construcción de una matriz donde se varía la profundidad de 1 a 150 m con intervalo de 1m y el periodo entre 2 y 14 s con intervalo de 0.5 s, lo que arrojó 3775 elementos. En los valores que sirven de frontera entre Aguas Profundas y Aguas Transicionales y Aguas Transicionales y Aguas Someras se refinó la malla discretizando la profundidad y se alcanzó un total de 3813 elementos. El criterio de zonas seleccionado es «h/L». En este sentido valores menores de 1/20 (0.05) corresponden a Aguas Someras (AS) y valores mayores de 1/2 (0.5) a Aguas Profundas (AP), los valores intermedios a Aguas Transicionales (AT). En las Figuras 1, 2 y 3 y Tabla 4 se puede observar el comportamiento para cada variante y los límites entre las distintas zonas respectivamente.

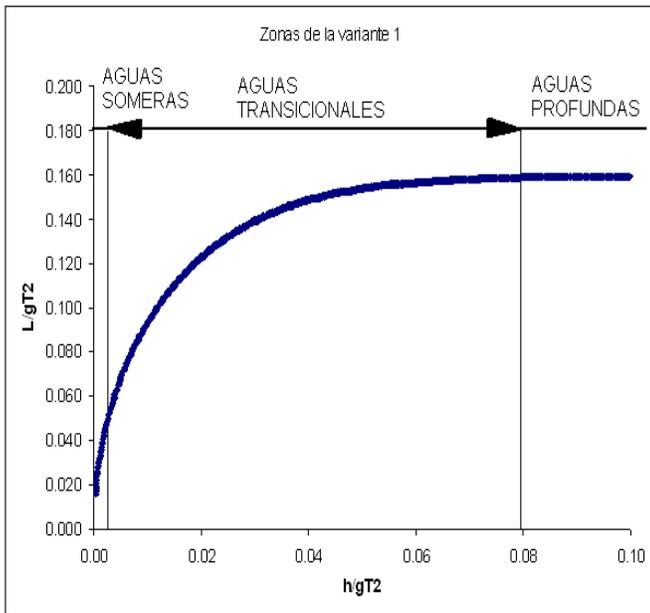


Fig. 1 Representación de las zonas para la variante 1.

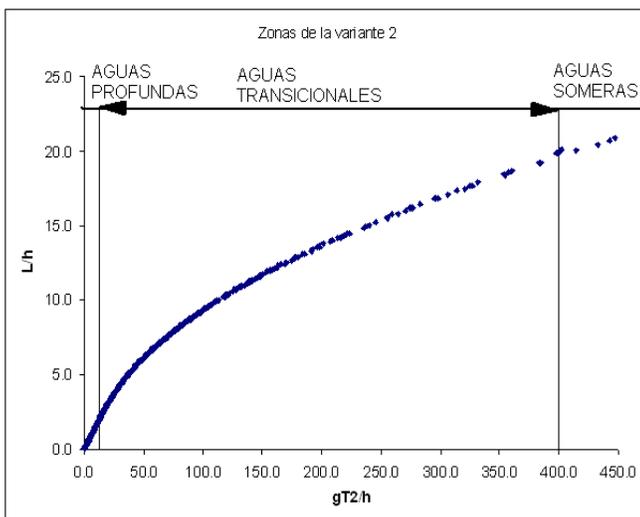


Fig. 2 Representación de las zonas para la variante 2.

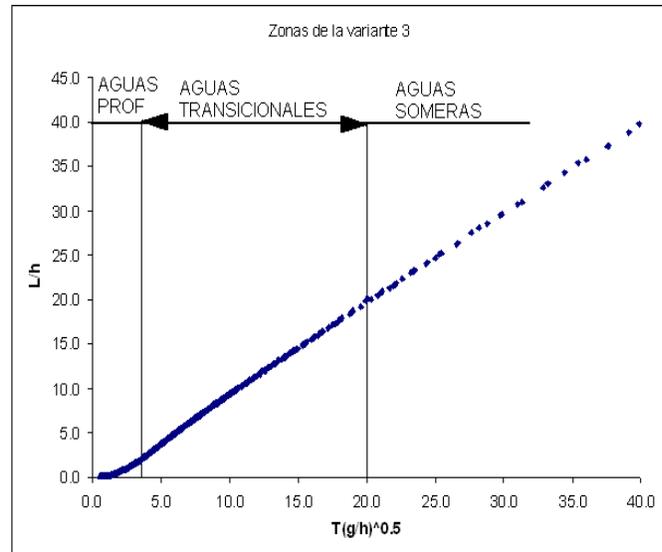


Fig. 3 Representación de las zonas en para variante 3.

Tabla 4. Límites de las variantes

	Valor	Variante1		Variante2		Variante3	
		h/(gT2)	L/(gT2)	gT2/h	L/h	T(h/g)^1/2	L/h
AS	Min	0.0003	0.0161	400	20	20	20
	Max	0.0025	0.05	3845	61.80	62.01	61.80
AT	Min	0.0026	0.05	12.57	2	3.55	2
	Max	0.0794	0.1586	399	19.99	19.99	19.99
AP	Min	0.0795	0.1591	0.262	0.042	0.511	0.042
	Max	3.8226	0.1592	12.56	2	3.54	2

Como se puede observar cada variante presenta un comportamiento diferente. En la variante 1 se aprecia una curva creciente entre las zonas de Aguas Someras y Aguas Transicionales y un valor constante en Aguas Profundas de 0.1592. Por su parte, la variante 2 muestra un comportamiento creciente en las 3 zonas, pudiéndose distinguir una recta en Aguas Profundas. Por último, la variante 3 representa una recta en Aguas Transicionales y Aguas Someras, mientras que en Aguas Profundas se comporta diferente.

Resulta importante destacar la cantidad de casos que corresponden a cada zona, donde se aprecia que la mayoría de las olas (2271), el 59.56%, corresponde con Aguas Profundas, (1476), el 38.71% a Aguas Transicionales y sólo (66) el 1.73% a Aguas Someras.

Una vez adimensionalizadas las profundidades y las longitudes de ola, se realizó un ajuste de curvas teniendo en cuenta ecuaciones lineales utilizando el programa TableCurve 2D v5.01, según las distintas variantes obtenidas del Teorema Pi teniendo en cuenta solo el rango de la zona de Aguas Transicionales, por ser la zona de conflicto de la expresión general. De este proceso se obtuvieron varias expresiones, de las cuales se seleccionaron

aquellas con mayor coeficiente de correlación, quedando 3 expresiones por variante como aparece en la Tabla 5, que posteriormente serán comparadas para seleccionar la más adecuada teniendo en cuenta aquella que arroje el error relativo máximo mas pequeño. Como se puede apreciar las expresiones de la variante 1 (ec. 31, 32 y 33) presentan el FSE más bajo, 100 veces más pequeño que el resto de las expresiones, lo que indica que con estas será más efectivo el cálculo, por lo que las expresiones de las variantes 2 y 3 son desechadas.

Posteriormente se prosigue con un nuevo experimento

tomando 50 datos para determinar la efectividad de las expresiones encontradas. Siendo los períodos de estudio son (8, 9, 10, 12, 15 s) para las profundidades de (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 m) correspondiendo a Aguas Transicionales.

Los resultados de este experimento, incluyendo una comparación con las restantes expresiones analíticas, se muestran en la Tabla 6.

De donde se puede apreciar que el error relativo obtenido por las tres expresiones propuestas es satisfactorio y que la primera expresión propuesta es la que arroja el menor

Tabla 5. Expresiones de ajuste para la longitud de la ola

Variante	Expresión	Coeeficientes	R2	FSE*
1	$y = a + bx^2 + cx^2 \ln(x) + dx^{0.5}$ <b>ec. 26</b>	a = 0.00036 b = 23.3901 c = 16.6861 d = 0.9841	0.99997	0.000155
	$y = a + bx^{1.5} + 72.104x^3 + 1.0161x^{0.5}$ <b>ec. 27</b>	a = $-9.5 \cdot 10^{-4}$ b = -7.2747 c = 72.104 d = 1.0161	0.99996	0.000158
	$y = a + bx^{1.5} + cx^{2.5} + dx^{0.5}$ <b>ec. 28</b>	a = -0.002365 b = -8.3659 c = 30.9337 d = 1.0399	0.99995	0.000189
2	$y = a + bx^{1.5} + c \ln(x)^2 + d \ln(x)$ <b>ec. 29</b>	a = 0.9829 b = 0.000393 c = 0.6476 d = -1.2513	0.99997	0.0192
	$y = a + bx \ln(x) + cx^2 + dx^{0.5}$ <b>ec. 30</b>	a = -2.5493 b = -0.0027 c = $1.9 \cdot 10^{-5}$ d = 1.296	0.99996	0.0203
	$y = a + bx^{1.5} + cx^{2.5} + dx^{0.5}$ <b>ec. 31</b>	a = -2.3795 b = -0.00073 c = $1.07 \cdot 10^{-6}$ d = 1.2368	0.99996	0.0203
3	$y = a + bx^{1.5} + cx^2 + dx^{2.5}$ <b>ec. 32</b>	a = -1.6424 b = 0.9879 c = -0.2879 d = 0.027	0.99997	0.0196
	$y = a + bx \ln(x) + cx^2 + dx^{2.5}$ <b>ec. 33</b>	a = -0.4189 b = 0.9847 c = -0.2068 d = 0.02464	0.99997	0.0202
	$y = a + bx^{1.5} + cx^2 + dx^3$ <b>ec. 34</b>	a = -1.4766 b = 0.8464 c = -0.1827 d = 0.00235	0.99996	0.0205

\* FSE: Fit Standard Error (Error estándar de ajuste)

Tabla 6. Resultados de la comparación entre expresiones analíticas.

Autor	Error Relativo (%)
Eckart (1952)	5.25
Hunt (1979)	0.19
Nielsen(1982)	0.44
Fenton & Mckee (1990)	9.11
Guo (2002)	0.82
You (2002)	0.54
Torres & Martínez(2007) ec 31	0.12
Torres & Martínez (2007) ec 32	0.20
Torres & Martínez (2007) ec 33	0.57

error relativo de todas en general. De esta manera se ratifica una vez más la validez del teorema Pi y del proceso de ajuste realizado anteriormente. La expresión que se propone finalmente queda de la forma:

$$L = gT^2 \cdot \left[ A + B \left( \frac{h}{gT^2} \right)^2 + C \left( \frac{h}{gT^2} \right)^2 \ln \left( \frac{h}{gT^2} \right) + D \left( \frac{h}{gT^2} \right)^{0.5} \right] \text{ ec 41}$$

Donde:

$$A = 0.00036, B = 23.3901, C = 16.6861, D = 0.9841$$

## CONCLUSIONES

Mediante los experimentos realizados en este trabajo se llegó a las siguientes conclusiones:

Empleando el análisis dimensional se obtuvieron 3 pares de parámetros Pi o variantes y se plantearon 9 posibles expresiones para calcular la longitud de ola en la zona de Aguas Transicionales.

La variante 1 obtenida del análisis dimensional confirmó la expresión de la longitud de la ola en aguas profundas, siendo  $L_o = 0.1591gT^2$ , donde el coeficiente es igual a  $1/2\delta$ . De este experimento se obtuvo que la ecuación 31 arroja el menor error relativo máximo en Aguas Transicionales de todos los métodos analizados, aplicando en el resto de las zonas las expresiones correspondientes. Por otra parte, dado la extensa base de datos trabajada y las pruebas realizadas se demostró que el 60% de los datos corresponden a Aguas Profundas, el 38% a Aguas Transicionales y el 2% a Aguas Someras.

## REFERENCIAS

- [1] CERC, «Coastal Engineering Manual». USACE. U.S. Army Coastal Engineering Research Center. 2002
- [2] Eckart, C. «Surface Waves on Water of Variable Depth». Scripps Institute of Oceanography, University of California, La Jolla. 1952
- [3] Hunt, J. N. «Direct Solution of Wave Dispersion Equation,» *ASCE Jour. Waterw., Port, Coastal and Ocean Engr.*, Vol 105, 1979. 457-459.
- [4] Nielsen, P. «Explicit formulae for practical wave calculations». *Coastal Engineering* 6, 1982, 389– 398.
- [5] Fenton, J., Mckee, W.D. «On the calculating lengths of water waves». *Coastal Engineering* 14. 1990. 499– 513
- [6] Guo, J. «Simple and explicit solution of wave dispersion equation». *Coastal Engineering* 45, 2002b. 71– 74.
- [7] You, Z., 2002. «Discussion of «Simple and Explicit solution to the wave dispersion equation». *Coastal Engineering* 45, 2002, 71– 74.
- [8] Streeter, V. «Mecánica de Fluidos». Novena Edición, McGraw Hill Interamericana, SA. Colombia. 2000. ■

Noviembre de 2009