Una alternativa de manejo de la ecuación de flujo exponencial en medios porosos

INTRODUCCIÓN

La ley clásica de filtración de Darcy es ampliamente utilizada en casi todas las situaciones de flujo en medios porosos. Esto es debido a que en la mayor parte de los casos el tipo de formación geológica presenta una estructura de agregados más o menos pequeños, de forma tal que los poros por donde circula el fluido lo hace con velocidades y gradientes tales que se cumple la ley lineal, $V = K_D \cdot I$, donde V es la velocidad media aparente de circulación, I el gradiente hidráulico y K_D la conductividad hidráulica de Darcy del medio poroso.

Sin embargo, se sabe desde el siglo XIX, Slichter (1899) citado por Porges & Hammer (2001), que esta ley sólo es válida dentro de cierto intervalo de gradientes y velocidades de filtración.

Si se tiene en cuenta que la explotación racional de un acuífero, así como las medidas para su conservación, dependen de la solución correcta de la ley de flujo a través del medio poroso, y se conoce además que la mayor parte de los acuíferos importantes en Cuba están formados por calizas cavernosas, será muy probable que el flujo hacia un pozo de captación de agua subterránea se produzca bajo régimen no lineal de flujo (Pérez, 1995), se deduce entonces que el problema tratado reviste tanto una importancia teórica como práctica en la actualidad.

Han surgido dos tipos de ecuaciones no lineales para describir el flujo en un medio poroso, en la búsqueda de expresiones mas precisas en un intervalo más amplio que la ley lineal.

Forchheimer (Domenico y Schwartz ,1998), sugirió emplear la ley binómica: $I = a V + b V^2$, donde a y b son constantes del medio poroso y del fluido. Por otra parte, otros investigadores como Missbach (1966), citado por Volker (1969), postulan una ecuación de tipo exponencial como:

$$V = K_f \; I^f$$

Donde K_f es un coeficiente llamado conductividad hidráulica, que depende del medio poroso y del fluido pero también del exponente del gradiente hidráulico, f.

Resumen / Abstract

Se revisa la ley exponencial de flujo mediante análisis dimensional que conduce a determinar la conductividad hidráulica. Pero ella depende del exponente del gradiente, aspecto que ha limitado el empleo en la práctica de la expresión exponencial. Se brinda la posibilidad de encontrar la velocidad según ley exponencial para gradiente y propiedades dadas. Se deriva relación general entre conductividad hidráulica y la de Darcy en función solo del exponente y del gradiente. Además, se logra excelente correlación entre la relación de gradientes (hidráulico y crítico Darcy) y el exponente del gradiente en la ley exponencial, por una extensa revisión de resultados experimentales de numerosos autores. Por último, se hace una correlación entre gradiente hidráulico crítico de Darcy y permeabilidad intrínseca, para estimar el gradiente crítico de Darcy cuando no hay información de rugosidad equivalente.

Palabras clave:medio poroso, filtración, ley de flujo exponencial, régimen no lineal

The exponential law of flow is revised through dimensional analysis leading to the determination of hydraulic conductivity (HC). But HC depends on the gradient exponent which has limited the use of the exponential law in practice. The paper shows how the velocity can be calculated given the gradient and the properties. A general relationship between hydraulic conductivity and that of Darcy is derived as a function only of the exponent and the gradient. Besides, an excellent correlation is obtained between a gradient quotient (hydraulic over Darcy critical) and the exponent of the gradient in the exponential law, derived from extensive data of experimental results of many authors. Lastly, a correlation between Darcy critical hydraulic gradient and intrinsic permeability is made to estimate Darcy critical gradient when no information is available about the media equivalent roughness.

Keywords: porous media, filtration, exponencial law of flow, non linear flow

Dr. Félix Dilla Salvador, CIH.CUJAE

Pérez (1995) hace un amplio empleo de la ley exponencial en la primera versión de su texto, bajo la suposición de mantener el exponente y el coeficiente de filtración como constantes para intervalos de gradientes mínimos y máximos con una razón de 10 veces entre sí. Sin embargo, ya en la última versión adopta la búsqueda de nuevas soluciones según la ecuación binómica.

Sent (1989) utiliza la ley exponencial de flujo para deducir una fórmula para flujo no lineal impermanente hacia un pozo de penetración total en un acuífero confinado. Este autor señala que para un mismo caudal el coeficiente de filtración toma diferentes valores en dependencia de la distancia del pozo de observación al pozo principal.

A partir de estas experiencias se deduce que el coeficiente de filtración como el exponente del gradiente son cantidades variables, que no deben emplearse para caracterizar el acuífero (Pérez ,1995).

Hernández (1982) por su parte muestra los resultados obtenidos al vincular ambas expresiones, la exponencial y la binómica de Forchheimer. Propone dos figuras para estimar el exponente y la conductividad hidráulica, conocidos los valores de las conductividades hidráulicas KD (en régimen lineal) y KT (en régimen turbulento), así como el intervalo de gradientes del problema dado.

El autor del presente trabajo hizo una búsqueda bibliográfica del tema flujo en medios porosos, como la siguiente:

- Journal of Hydraulics Engineering. ASCE. USA. ISSN: 0733-9429
- Physics of Fluids, American Institute of Physics. USA. ISSN: 1070-6631
- Journal of Porous Media, Begell House Inc. USA. ISSN: 1091-028X

Esta literatura no reporta en los últimos treinta años aplicaciones fundamentadas en la ley exponencial, análoga a la de Darcy, de flujo en medios porosos.

Sin embargo, son numerosas las referencias a la más conocida de las expresiones binómicas, la de Dupuit-Forchheimer. En buena medida esto ha sido debido a que la conductividad hidráulica, Kf, depende del exponente, f , el cual vale 1 cuando el régimen es lineal y 0.5 en régimen turbulento desarrollado o puro, pero su valor es desconocido en el intervalo intermedio donde es una función del gradiente hidráulico.

Lo anterior ha motivado el objetivo de este trabajo, el cual brinda la posibilidad de calcular la velocidad del flujo mediante la ley exponencial, para un gradiente dado y conocidas las propiedades del medio poroso, vale decir, su permeabilidad intrínseca k y el coeficiente adimensional C . Este coeficiente es denominado "rugosidad equivalente del medio poroso" por Pérez (1995), al cual Ward (1964) consideró una constante universal, si bien señalaba que esto podía no ser así en otros medios diferentes a los ensayados por él, como pudo ser comprobado después por Abhabhirama & Dinoy (1973) y Dilla (1974).

ANÁLISIS DIMENSIONAL

El presente trabajo comienza con la revisión de la ley exponencial de flujo obtenida mediante un análisis dimensional del fenómeno de filtración de las aguas subterráneas (Dilla ,1974).

Este análisis condujo a la obtención de la conductividad hidráulica, Kf, para un valor dado del gradiente hidráulico I, en un medio poroso de permeabilidad conocida bajo la circulación de un fluido. Sin embargo, el coeficiente Kf depende del exponente a que está elevado el gradiente en la ecuación de flujo exponencial, aspecto que ha limitado en extremo el empleo de este tipo de expresión.

Lo anterior ha motivado al autor a encontrar una relación entre el gradiente hidráulico y el exponente del mismo en la ecuación de flujo, ajuste que se presenta más adelante.

El fenómeno del proceso hidráulico del flujo a través de un medio poroso queda definido por las cinco variables siguientes (Dilla, 1974): F (V, Ip, k, μ, σc).

Donde: V es la velocidad media aparente de circulación, $I_p = I.\gamma$ el gradiente de presión, γ peso especifico del liquido, k permeabilidad intrínseca del medio poroso, σ_c tensión del liquido en contacto con el medio poroso, μ viscosidad dinámica del fluido.

Eligiendo a σ_c como variable principal se tiene: $\sigma_c = c' \ V^a \ k^b \ \mu^c \ (I_p)^d$.

Por medio del principio de la homogeneidad dimensional se sustituyen los exponentes en función de uno de ellos, se elige d, obteniéndose:

$$\sigma c = c' \ V^{1-d} \ k^d \ \mu^{1-d} \ I_p^d \qquad (2)$$

Lindeburg (1999) apunta que la anterior constante adimensional, c´, depende del valor del exponente d.

Slepicka (1961) no tiene en cuenta en su análisis la constante física c´, y además, considera a σ_c como la tensión superficial del liquido constante en todos los medios porosos, lo que implica caracterizar al medio poroso solamente por su permeabilidad intrínseca k, aspecto altamente dudoso como se deriva al final de este trabajo.

Agrupando ahora los términos en la ecuación (2) se obtiene:

$$k I_p / V\mu = (c')^e \ (k I_p / \sigma_c)^e \qquad (3)$$

Llamando Π_1 al término adimensional a la izquierda en la ecuación (3) y Π_2 al término adimensional entre paréntesis a la derecha, se arriba a:

$\Pi_1 = (c'. \Pi_2)^e$ donde: e = 1/(1-d)

De lo anterior se propone el siguiente parámetro adimensional: $\Pi_3 = c' \ \Pi_2$

Sustituyendo, $\Pi_3 = c'. \ k \ Ip \ / \ \sigma_c$, se obtiene la siguiente relación entre los parámetros:

$$\Pi_1 = (\Pi_3)^e \qquad (4)$$

Combinando la expresión (4) con la fórmula exponencial de flujo (1), se deduce que:

e = 1-f donde f es el exponente del gradiente hidráuli-

TABLA I- INFORMACION DE SUELOS.

No.	Investigador	k(cm^2)	I_{CRD}	Ecuación Binómica
1	Dilla (1)	$1.10*10^{-3}$	$2.038*10^{-4}$	$0.0088\,V + 0.0190\,V^2$
2	Dilla (2)	$4.70*10^{-4}$	$4.233*10^{-4}$	$0.0193\,V + 0.044\,V^2$
3	Dilla (3)	$1.0*10^{-4}$	$3.739*10^{-3}$	$0.0907\,V + 0.110\,V^2$
4	Dilla (4)	$1.0*10^{-2}$	$1.236*10^{-5}$	$0.00093\,V + 0.0035\,V^2$
5	Ahmed (1)	$2.1*10^{-6}$	3.665	$7.39\,V + 0.745\,V^2$
6	Ahmed (2)	$3.96*10^{-6}$	1.590	$3.80\,V + 0.454\,V^2$
7	Ahmed (3)	$6.91*10^{-6}$	0.859	$2.30\,V + 0.308\,V^2$
8	Ahmed (4)	$1.0*10^{-5}$	0.4625	$1.49\,V + 0.24\,V^2$
9	Ahmed (5)	$1.69*10^{-5}$	0.246	$0.938\,V + 0.179\,V^2$
10	Ahmed (6)	$2.21*10^{-5}$	0.146	$0.694\,V + 0.165\,V^2$
11	Allen	$8.6*10^{-6}$	0.761	$1.47\,V + 0.142\,V^2$
12	Blake	$6.7*10^{-5}$	0.0178	$0.149\,V + 0.0623\,V^2$
13	Brownell (1)	$1.5*10^{-4}$	0.0114	$0.0647\,V + 0.0183\,V^2$
14	Brownell (2)	$1.12*10^{-4}$	0.0189	$0.089\,V + 0.021\,V^2$
15	Fancher	$8.2*10^{-7}$	7.03	$16.6\,V + 1.96\,V^2$
16	Forchheimer (1)	$2.3*10^{-3}$	$1.665*10^{-4}$	$0.00408\,V + 0.005\,V^2$
17	Forchheimer (2)	$7.6*10^{-4}$	$8.222*10^{-4}$	$0.0123\,V + 0.0092\,V^2$
18	Kirkham	$1.19*10^{-3}$	$3.43*10^{-4}$	$0.00895\,V + 0.0117\,V^2$
19	Lindquist (1)	$1.38*10^{-4}$	$6.172*10^{-3}$	$0.0674\,V + 0.0368\,V^2$
20	Lindquist (2)	$8.0*10^{-6}$	0.232	$1.164\,V + 0.292\,V^2$
21	Mobasheri	$4.94*10^{-5}$	0.01304	$0.189\,V + 0.137\,V^2$
22	Sunada	$6.45*10^{-5}$	0.0162	$0.145\,V + 0.0648\,V^2$
23	Volker	$9.56*10^{-4}$	$4.34*10^{-4}$	$0.0105\,V + 0.0127\,V^2$

co en la ecuación de flujo exponencial (1).

Una vía muy sugestiva, y además directa sin necesidad de estimar Π_3, es la obtención de la ecuación exponencial de flujo a partir de la correlación entre el parámetro adimensional Π_1 y el exponente del gradiente, f, en la ecuación exponencial de flujo, ajuste que se deduce a partir de la función (4) obtenida mediante un análisis teórico dimensional.

Para ello, el autor se propuso realizar un trabajo experimental consistente en hacer pasar un flujo de agua bajo condiciones permanentes a través de cuatro materiales granulares, con la finalidad de obtener la curva de velocidad aparente contra gradiente hidráulico, para cada uno de los suelos ensayados.

Se ensayaron suelos más bien gruesos, desde arena gruesa de 2.5mm hasta grava gruesa de 22mm, debido a que se disponía de suficiente información de suelos más finos, véase cuadro 1 (Ahmed & Sunada (1969), e información del autor).

A. Primera correlación

Si se sustituye en la relación exponencial (4) los parámetros adimensionales por sus expresiones, y se despeja V, se obtiene la ecuación general de la ley de filtración:

$$V = (c')^{1-f}\ (\sigma_c / \mu)^{1-f}\ (K_D)^f\ I^f = K_f\,.I^f \qquad (5)$$

Donde: $K_D = k.\ \gamma / \mu$ (Pérez, 1995).

Se deduce por simple inspección que la conductividad hidráulica depende de f , σ_c , c´, entre otros términos, lo que dificulta en extremo el empleo de la ecuación (5) y justifica en cierta medida el objetivo de este trabajo.

El procedimiento llevado a cabo consiste en determinar el parámetro Π_1 y el exponente del gradiente con la información de los 23 medios porosos, mostrados en el cuadro 1 y otros 26 medios presentados en el cuadro 2 (Venkataraman ,1998).

B. Procedimiento de cálculo seguido:

A partir de las ecuaciones binómicas se calcula el gradiente al menos para cinco velocidades diferentes en

TABLA II-INFORMACION DE SUELOS DE VENKATARAMAN & RAMA (1998).

No	Investigador	k (cm^2)	I_{CRD}	Ecuación Binómica
1	Dudgeon (1)	0.004	$2.687*10^{-5}$	$2.55*10^{-3}$ V + 0.0121 V^2
2	(2)	0.0204	$8.330*10^{-6}$	$0.5*10^{3}$ V + 0.0015 V^2
3	(3)	0.00175	$2.206*10^{-4}$	$5.829*10^{3}$ V + 0.0077 V^2
4	(4)	0.00224	$1.571*10^{-4}$	$4.554*10^{3}$ V + 0.0066 V^2
5	(5)	0.00247	$1.354*10^{-4}$	$4.13*10^{-3}$ V + 0.0063 V^2
6	(6)	0.0012	$3.507*10^{-4}$	$8.5*10^{3}$ V + 0.0103 V^2
7	(7)	0.00103	$3.065*10^{-4}$	$9.903*10^{-3}$ V + 0.016 V^2
8	(8)	0.00017	$3.141*10^{-3}$	0.06 V + 0.0573 V^2
9	Ward (1)	$3.0*10^{6}$	2.312	3.4 V + 0.25 V^2
10	(2)	$1.0*10^{6}$	7.41	10.2 V + 0.702 V^2
11	(3)	$1.0*10^{6}$	10.404	10.2 V + 0.50 V^2
12	Sharma	0.00072	$1.025*10^{-3}$	0.01417 V + 0.00979 V^2
13	R.Rao& Zurres (1)	$2.3*10^{5}$	0.0894	0.4435 V + 0.110 V^2
14	(2)	$3.5*10^{5}$	0.0483	0.2914 V + 0.088 V^2
15	(3)	$9.8*10^{5}$	0.0102	0.1041 V + 0.053 V^2
16	Nasser	$4.24*10^{-4}$	$9.55*10^{-4}$	0.0241 V + 0.0304 V^2
17	Arbhabhirama.& Dinoy (1)	$8.83*10^{-4}$	$1.191*10^{-3}$	$1.155*10^{-2}$ V + 0.0056 V^2
18	(2)	$3.76*10^{-4}$	$2.83*10^{-3}$	$2.713*10^{-2}$ V + 0.013 V^2
19	(3)	$1.69*10^{-4}$	$8.8*10^{3}$	$6.036*10^{-2}$ V + 0.0207 V^2
20	(4)	$1.81*10^{-4}$	$8.49*10^{-3}$	$5.635*10^{-2}$ V + 0.0187 V^2
21	(5)	$8.5*10^{5}$	0.0185	0.12 V + 0.039 V^2
22	(6)	$1.2*10^{5}$	0.2064	0.85 V + 0.175 V^2
23	Ciray & Bekdil (B)	$3.54*10^{-4}$	$1.153*10^{-3}$	0.0288 V + 0.036 V^2
24	(C)	$5.4 * 10^{4}$	$1.619*10^{-3}$	0.0189 V + 0.011 V^2
25	(D)	$7.28*10^{-4}$	$2.13*10^{-3}$	0.014 V + 0.0046 V^2
26	(E)	$2.04*10^{-3}$	$8.922*10^{-4}$	0.005 V + 0.0014 V^2

cada tipo de suelo.

El exponente es calculado por medio de:

$f = [\log. (V_2 / V_1)] / [\log. (I_2 / I_1)]$

Se toma este valor de f como la pendiente de la tangente en el punto medio, o sea, para:

$\log V = 1/2 (\log V_1 + \log V_2)$, donde: $1.2 < V_2 / V_1 < 1.6$

El parámetro Π_1 se evalúa con esta velocidad media así determinada y su correspondiente gradiente obtenido a través de la ecuación binómica.

Son calculados 256 valores de Π_1 , f , (I / I_{CRD}), a partir de la información de los 49 medios porosos presentados en los cuadros 1 y 2, donde I_{CRD} es el valor superior (crítico) del gradiente por encima del cual no es aplicable la ley de Darcy. (El lector interesado en estos valores, no presentados por su extensión, puede solicitárselos al autor).

Nótese que la relación entre Π_1 y f es respaldada con una amplia información de medios porosos, desde arenas con diámetros de 0.5 y 5mm hasta gravas de 22 mm y también con medios no naturales como esferas de vidrio, tejuelos de níquel, lentejuelas de vidrio y materiales granulares absorbentes. La permeabilidad intrínseca de estos medios abarca un gran intervalo, desde $1.0*10^{-2}$ hasta $8.2*10^{-7}$ cm^2.

Si bien la base de dato empleada se obtiene fundamentalmente de experiencias con flujo paralelo, en opinión de este autor puede ser extrapolada al flujo convergente.

Reddy y Rao (2006) estudian la variabilidad de los parámetros a y b de la ecuación binómica de Forchheimer con la convergencia del flujo. Esta afirmación procede de un manejo inadecuado de su base de dato experimental, que los lleva a obtener conclusiones incorrectas, como será demostrado en una publicación posterior del autor.

La correlación alcanzada entre (Π_1) y (f) sigue entre otras la siguiente simple función:

$\Pi_1 = (2-1/f)^{-1}$ (6)

Función que es mostrada en la figura (1), con una correlación:

$r^2 = 1.0$ y Error Std. de Ajuste en $\Pi_1 = 0.0029$, válida para:

$1 >= f > 0.5$

C. Relación entre las conductividades hidráulicas.

De ?1 se deduce la siguiente interpretación física: $\Pi 1 = k.\gamma .I / \mu .V = K_D\ I / V$.

Representa la relación de las velocidades lineal y no lineal del flujo subterráneo.

Nótese como en régimen lineal $\Pi_1 = 1$. Si se sustituye en Π_1 la velocidad por la ecuación (1) se obtiene la siguiente relación general entre las conductividades hidráulicas:

$K_f / K_D = (I)^{1-f} / \Pi_1$ (7)

En el caso particular de régimen turbulento desarrollado cuando f = 0.5, el gradiente hidráulico I = ICRT, la conductividad hidráulica Kf= KT, y la relación entre las conductividades hidráulicas se expresa como:

$K_T / K_D = (I_{CRT})^{0.5} / \Pi_1$ (8)

Por otro lado, se deduce: $I_{CRT} = I_{CRD} / \epsilon^3$ (Dilla, 1984), siendo ϵ el error admisible al extender la ley lineal mas allá de su limite de validez. Cuando el gradiente ICRT se sustituye en función de ICRD, a partir de la relación (8), se obtiene:

$K_T/K_D = (1/\Pi_1 \epsilon)\,(I_{CRD} / \epsilon)^{0.5}$ (9)

Al compararse la ecuación (9) con la del gradiente crítico de Darcy: $I_{CRD} = \epsilon\ (K_T / K_D)^2$

(Pérez, 1995), se deduce que Π_1 en régimen turbulento desarrollado es una función del error admisible, dada como: $\Pi_1 = 1/\epsilon$.

Sustituyendo este resultado de Π_1 en régimen turbulento en la ecuación (9) se obtiene:

$K_T/K_D = (I_{CRD} / \epsilon)^{0.5}$ (10a)

Ecuación que es equivalente a la expresión (10b), (Pérez, 1995):

$I_{CRD} = \epsilon \nu^2 / g\, c\, k^{1.5}$ (10b)

Al combinar la ecuación (6) de ajuste experimental entre Π_1 y f con la ecuación (7) de las conductividades hidráulicas, se obtiene una relación general entre las conductividades hidráulicas, en función del exponente y

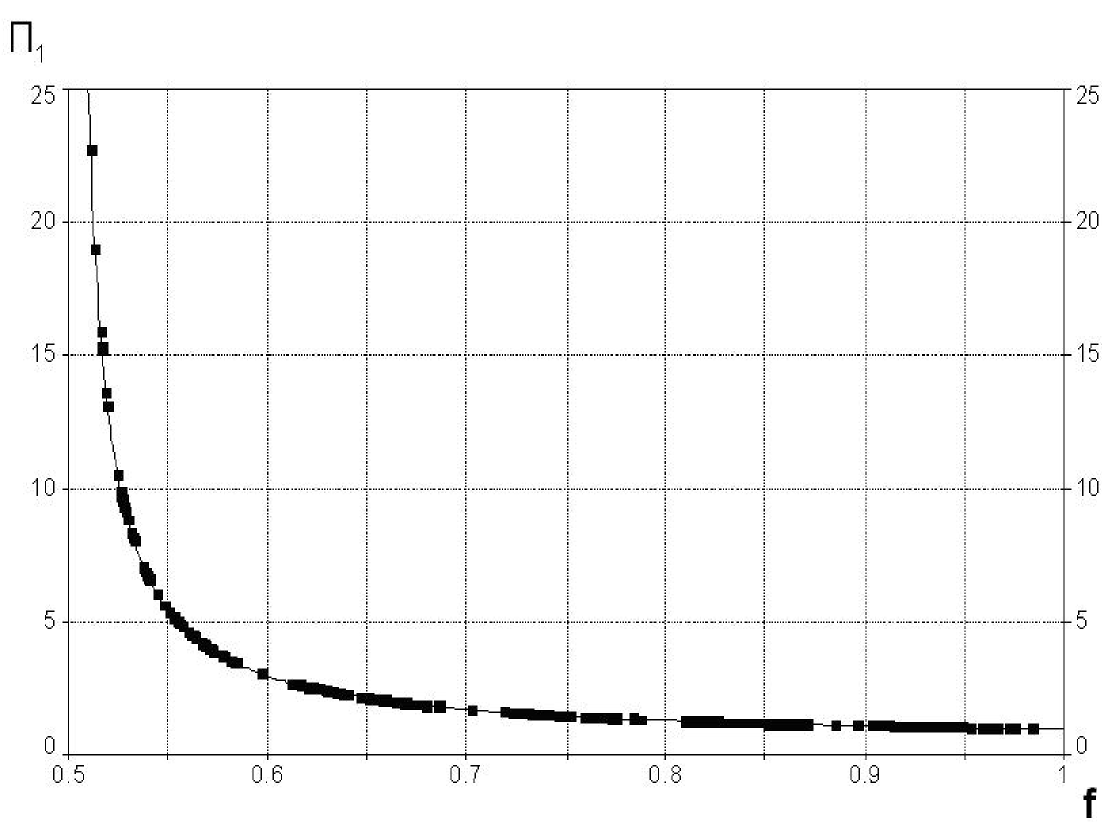

Figura 1. Relación entre el parámetro ?1 y el exponente del gradiente hidráulico.

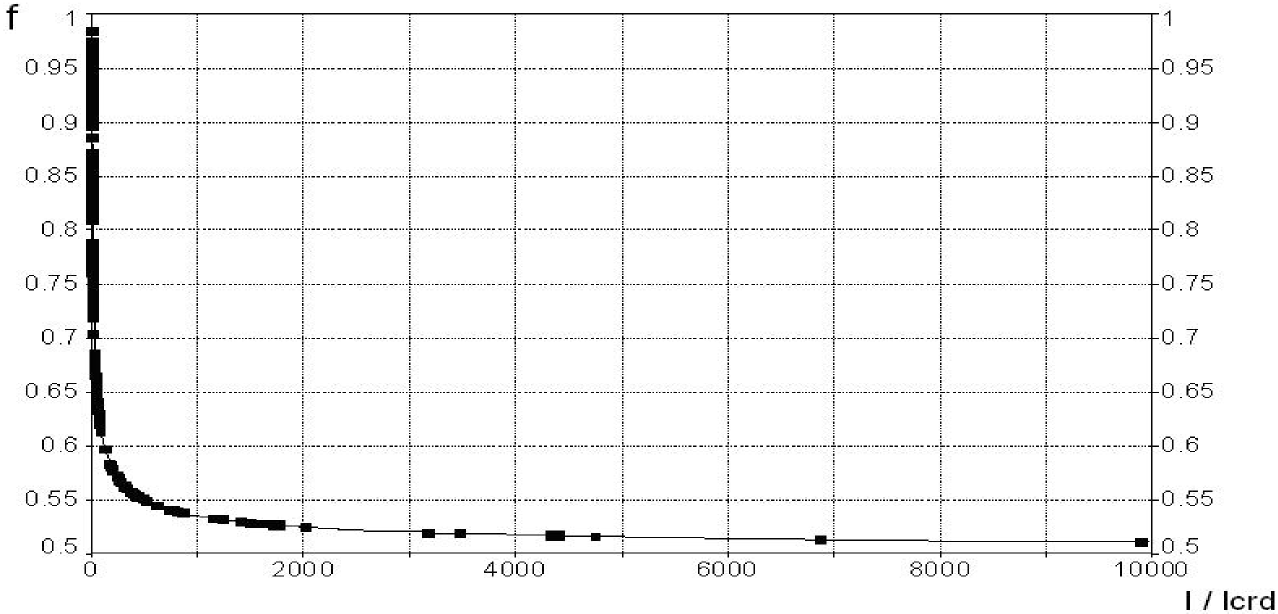

Figura 2. Relación entre el exponente en la ecuación de flujo exponencial y la relación de gradientes hidráulicos (I / I_{CRD}).

del gradiente hidráulico:

$K_f / K_D = (2-1/f)\,(I)^{1-f}$ (11)

D. Relación entre el gradiente y el exponente en la ecuación de flujo.

En la relación general de las conductividades hidráulicas, ecuación (11), persiste aún el inconveniente que K_f depende del exponente f, lo que limita encontrar la velocidad que le corresponde a un gradiente dado, conocidas las propiedades del medio poroso y fluido que circula, o sea, lo que equivale a conocer la conductividad hidráulica de Darcy, K_D.

Por ello, se centra a continuación el interés en el exponente de la ecuación (1) para estimar su valor correspondiente a un gradiente hidráulico conocido.

Se realiza una segunda correlación, ahora entre la relación de gradientes, I / I_{CRD}, y el exponente f, basada en los 256 valores ya comentados.

Resulta por ajuste empírico la siguiente simple función, mostrada en la figura (2):

$f = 0.5 + 0.5 / (1 + 0.2 * I / I_{CRD})^{0.5}$ (12)

Con una correlación: $r^2 = 1$ y Error Std. de Ajuste en $f = 5.945*10^{-5}$

E. Procedimiento a seguir.

La definición del error admisible al extender la ley lineal más allá de su límite de validez, en función de a y b, resulta cómoda cuando se dispone de información de la ecuación binómica:

$\epsilon = (I_C' - I_C) / I_C = \{ (a.V + b.V^2) - (a.V) \} / (a.V) = b.V / a$

Donde I_C' e I_C, son los gradientes hallados por la ecuación binómica y lineal, respectivamente.

Como $V_{CRD} = I_{CRD} / a$, resulta finalmente:

$I_{CRD} = (a^2 / b).\epsilon$ (13)

A continuación se resume cómo enfrentar la solución del problema planteado que consiste en obtener la ecuación de flujo exponencial, y como resultado el cálculo de la velocidad de circulación, correspondiente a un gradiente hidráulico dado, en un medio poroso de propiedades hidrogeológicas conocidas bajo la circulación de un fluido:

1. Hallar el gradiente crítico de Darcy, función de las propiedades del medio poroso, por las ecuaciones (10) o (13).

2. Calcular la relación entre los gradientes, (I / I_{CRD}), y estimar el exponente de la ecuación de flujo por la ecuación de ajuste empírico (12).

3. Determinar el coeficiente de conductividad hidráulica, K_f, por la ecuación (11).

4. Calcular la velocidad por la formula exponencial (1), conocidos el exponente f y K_f

También, la velocidad de flujo puede obtenerse a partir del parámetro $\Pi 1$, por medio de la expresión de ajuste empírico (6).

F. Ejemplo ilustrativo.

Obtener la ecuación exponencial y la velocidad del flujo en el suelo de Ahmed (1), para un gradiente hidráulico I = 50.

Ecuación binómica: $I = 7.39\ V + 0.745\ V^2$

1. $I_{CRD} = (a^2 / b).\epsilon = [(7.39)^2 / 0.745).\ (0.05)] = 3.665$, para un error $\epsilon = 5\ \%$.

2. $I / I_{CRD} = 50 / 3.665 = 13.6417$

3. $f = 0.5 + 0.5 / [1 + 0.2\ (13.6417)]^{0.5} = 0.5 + 0.259 = 0.759$.

4. $K_f = K_D$ (2-1/f). $(I)^{1-f}$= 0.135 (2 -1/ 0.759) $(50)^{0.241}$
K_f= 0.2365 cm/s
donde: KD =1/ a = 1/ 7.39 = 0.135 cm/s
$V = K_f \cdot I^f$= 0.2365 $(50)^{0.759}$, resulta: V = 4.6054 cm/s
para I = 50

Para saber la precisión lograda en el análisis, se calcula el gradiente hidráulico:

I = 7.39 * 4.6054 + 0.745 * $(4.6054)^2$= 49.85

El error cometido es: (50 - 49.85) / 50 = 0.0033, o sea, un valor admisible de 0.33%.

G. Validación de las expresiones empíricas obtenidas.

Hernández (1982) considera que ambas expresiones, exponencial y binómica, son coincidentes para un determinado intervalo de gradiente e iguala las velocidades obtenidas por ambas expresiones y obtuvo una expresión donde se relaciona K_f con f, en función de las propiedades del medio poroso dadas por K_D y K_T, además del gradiente de flujo. A partir de esta expresión dicho autor determina el valor mínimo de la relación K_f/K_D, derivándola respecto al exponente f, con lo cual deduce un valor mínimo de esta relación cuando el gradiente hidráulico es la unidad.

En el presente trabajo se comprueba que los valores obtenidos de f por la expresión (12) y de la relación K_f/K_D según (11), basados en el gradiente unitario, son idénticos a los valores mínimos de las relaciones de K_T/K_D obtenidos por una vía analítica según Hernández (1982), presentados en la tabla 3.

TABLA 3- VALORES MINIMOS DE LA RELACION K_f / K_D

K_T/K_D	I_{CRD}	I	f	K_f/K_D
0.1	5.10^{-4}	1.0	0.525	0.095
0.3	$4.5.10^{-3}$	1.0	0.574	0.258
0.5	0.0125	1.0	0.621	0.390
0.7	0.0245	1.0	0.665	0.497
0.9	0.0405	1.0	0.705	0.582

H. Relación entre el gradiente crítico y la permeabilidad intrínseca.

El resultado obtenido anteriormente, expresión (10a), permite estimar K_T, o el término b de la ecuación binómica dado por: b= 1/ $(K_T)^2$, cuando el gradiente crítico de Darcy es dato, obtenido por la expresión (10b), conocidas las dos propiedades hidrogeológicas del medio poroso, k y C.

Es por ello, que se realiza por último en el trabajo la correlación entre I_{CRD} y k.

Para el total de 49 pares de valores de gradiente crítico de Darcy y de permeabilidad intrínseca, se fundamenta una correlación logarítmica entre I_{CRD} y k, considerando un error de 5% en I_{CRD}, obteniéndose la siguiente simple función por ajuste empírico:

I_{CRD}= 5.118* 10^{-8} / $(k)^{1.3636}$ (14)

Con una correlación: r^2 = 0.935 y un Error Std. de Ajuste en el log. I_{CRD} igual a 0.368.

Este error en el logaritmo implica el siguiente intervalo de confianza en el gradiente crítico:

0.43 * ec. (14) $<=$ I_{CRD} $<=$ 2.33 *ec. (14)

El valor de correlación obtenida es aceptable, no así el error de ajuste, evidenciando la influencia de la rugosidad equivalente, C, propiedad del medio poroso no considerada en el análisis realizado.

Por lo anterior, el uso de la ecuación (14) para estimar ICRD cuando no se dispone de información de la rugosidad equivalente del medio poroso, debe hacerse con reserva en el intervalo de confianza expresado antes.

Aplicación al flujo no lineal permanente.

A manera de ilustración del manejo propuesto de la ecuación de flujo exponencial se presentan tres casos conocidos en la literatura (Pérez 1995).

Propiedades del medio poroso y fluido:
k = 5.23*10^{-11} m^2 C= 140.73 I_{CRD}= 0.0958
ν =10^{-6} m^2/s

Caso 1: flujo unidireccional

Dado un gradiente de flujo natural, I = 0.5, calcular la velocidad de circulación:

a) Por la ley exponencial.

Aplicando la ecuación (12) se determina el exponente para el gradiente dado: f= 0.85

El coeficiente de filtración se calcula por la ecuación (11): K_f= 3.807*10^{-4} m/s.

Por tanto, por la ecuación (1) resulta una velocidad:
U = 2.112*10^{-4} m/s

b) Por la ley binómica.

a = 1 / K_D = ν / g. k = 1.948*10^3 s/m
b = C / g. $k^{0.5}$ = 1.984*10^6 s^2/m^2

Resolviendo la ecuación de segundo grado resulta:
U = 2.111*10^{-4} m/s

Caso 2: flujo hacia una trinchera de penetración superficial

Sea **Y** la altura de agua medida a partir del nivel estabilizado en la trinchera y **X** la distancia del pozo de observación respecto al eje de la misma.

Para: X_1= 1 m y X_2=5 m corresponde una variación de nivel: $Y_2 - Y_1$= 1.25m

Calcular el gasto total hacia la trinchera:

a) Por la ley exponencial:

$q = \pi\ K_f [z (Y_2 - Y_1) / (X^z{}_2 - X^z{}_1)]^f$ donde: z= (f-1) / f

Considerando un gradiente medio en la zona de flujo:

I = 1.25 / 4 = 0.3125

Aplicando la ecuación (12) se determina el exponente para el gradiente medio: f = 0.889

El coeficiente de filtración se calcula por la ecuación (11): K_f= 3.946*10^{-4} m/s.

Aplicando la ecuación del gasto dada antes resulta:

q = 10.81*10^{-4} m^3/s

b) Por la ley binómica

$Y_2-Y_1= q / \pi K_D \ln (X_2 / X_1) + q^2 / \pi^2 K^2{}_T (X_2-X_1) / X_1 X_2$, donde: $K^2{}_T= g\ k^{0.5} / C$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: q = 10.68*10^{-4} m^3/s

<u>Comentario:</u>

La determinación del flujo hacia trinchera que penetra todo el espesor saturado de un acuífero libre resulta sencilla por el criterio exponencial, dada por la expresión:

$q = K_f [(h^z{}_1 - h^z{}_2) / z (X_1 - X_2)]^f$

Donde q es el caudal por unidad de longitud hacia un lado de la estructura a través de una sección transversal saturada de altura h. El exponente z viene dado por:

z = 1+1/f

Sin embargo, por el criterio binómico resulta la siguiente ecuación diferencial:

$dh= q / h [1 / K_D + q^2 / K_T h] dx$

Esta ecuación ha sido resuelta por Canalejo (1985) mediante programas de cómputo.

Caso 3: flujo radial hacia un pozo en acuífero confinado

Sea **S** el abatimiento medido a partir del nivel piezométrico alcanzado en el acuífero confinado antes del bombeo y **R** la distancia radial tomada desde el pozo de observación al de bombeo. El espesor del acuífero confinado es m= 30 m.

En el pozo de bombeo R_1=0.25 m y en el pozo de observación R_2=20.40 m.

La variación de abatimientos entre estos dos pozos es S_1-S_2= 2.95 m.

Calcular el gasto de extracción del pozo de bombeo:

a) Por la ley exponencial.

$Q = 2\pi\ m\ K_f [z (S_1 - S_2) (R^z{}_2 . R^z{}_1) / (R^z{}_2 - R^z{}_1)]^f$, donde: Z= (f-1) / f

El gradiente medio entre los pozos es:

$I= S_1-S_2 / R_2- R_1$= 2.95 / 20.15= 0.1464

Al aplicar la ecuación (12) se determina el exponente para el gradiente medio: f = 0.938

El coeficiente de filtración se calcula por la ecuación (11): K_f= 4.247*10^{-4} m/s

A partir de la ecuación del gasto dada antes resulta: 0.0521 m^3/s

b) Por la ley binómica

$Q = [-B_p + (B^2{}_p + 4D_p\ \Delta S)^{0.5}] / 2.D_p$

Donde: $B_p= \ln (R_2 / R_1) / 2\pi\ m\ K_D$

$D_p= (1/ 2\pi\ m\ K^2{}_T)^2 (R_2-R_1) / R_1.R_2$

Al aplicar la ecuación del gasto dada antes resulta: 0.0520 m^3/s.

Las diferencias obtenidas en los tres casos analizados, por las leyes exponenciales y binómicas, son pequeñas, admisibles en la práctica de ingeniería. Véase Tabla 4.

TABLA 4- COMPARACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR AMBAS EXPRESIONES DE FLUJO.

Caso	Exponencial	Binómica	Diferencia en %
1	2.112*10^{-4}	2.111*10^{-4}	0.05
2	0.001081	0.001068	1.2
3	0.0521	0.0520	0.19

CONCLUSIONES

1. Mediante un análisis dimensional del fenómeno de filtración de las aguas subterráneas (Dilla, 1974) se deduce la relación entre los parámetros adimensionales Π_1 y Π_3

El parámetro adimensional Π_1 representa la relación de las velocidades lineal y no lineal del flujo subterráneo para un gradiente hidráulico dado: Π_1= KD I / V. En régimen lineal Π_1= 1 y en régimen turbulento desarrollado, cuando el exponente es f = 0.5, resulta $\Pi_1=1/\epsilon$, donde ϵ es el error admisible al extender la ley lineal más allá de su límite de validez.

2. La correlación entre Π_1 y el exponente f de la ecuación de flujo exponencial, constituye una vía precisa y directa para la búsqueda de la ecuación (1), expresándose por la función simple: $\Pi_1= (2-1/f)^{-1}$ con una correlación: r^2= 1 y un Error Standard de Ajuste en Π_1= 0.0029.

3. La relación general de las conductividades hidráulicas, en función solamente del exponente y del gradiente hidráulico, viene expresada por: $K_f / K_D= (2-1/f).(I)^{1-f}$

4. Existe una excelente correlación entre la relación de gradientes (I / I_{CRD}) y el exponente del gradiente (f), dada por la simple función: $f= 0.5 + 0.5 / (1+ 0.2 * I / I_{CRD})^{-0.5}$, con una correlación: $r^2= 1$ y un Error Standard de Ajuste en $f = 5.945 * 10^{-5}$

5. La conductividad hidráulica turbulenta K_T, o el parámetro b en la fórmula binómica,

$b= 1/ (K_T)^2$, se determina de manera sencilla conocido el gradiente crítico de Darcy, por la expresión: $K_T / K_D= (I_{CRD} / \epsilon)^{0.5}$

6. La definición realizada del error admisible en el gradiente hidráulico, al extender la ley lineal más allá de su límite de validez, en función de los parámetros a y b de la ecuación binómica, resulta cómoda cuando se dispone solamente de información de esa ecuación.

Como consecuencia se obtiene el gradiente critico de Darcy dado por: $I_{CRD}= (a^2 / b).\epsilon$

7. Se ilustra cómo enfrentar la solución del problema planteado con la ecuación de flujo exponencial: $V= K_f. I^f$, consistente en encontrar esta ecuación y como resultado la velocidad de circulación bajo un gradiente de flujo, en un medio poroso de propiedades hidrogeológicas conocidas sometido al movimiento de un fluido, o sea, equivalente a conocer la conductividad hidráulica de Darcy, K_D.

8. Los resultados de la correlación entre el gradiente crítico de Darcy y la permeabilidad intrínseca evidencia la influencia de la rugosidad equivalente del medio poroso, no considerada en el análisis.

REFERENCIAS

1. ARBHABHIRAMA, A. y DINOY, A.A. Friction factor and Reynolds number in porous media flow. *Journal of the Hydraulics Division*. ASCE. 1973, Vol. 99, núm.HY6, pp.901- 911.

2. AHMED, N. y SUNADA, D.K. Non linear flow in porous media. *Journal of the Hydraulics Division*. ASCE. 1969, Vol.95, núm. HY3, pp.1847-1857.

3. CANALEJO, I. Flujo no lineal permanente hacia una galería en acuífero libre. *Ingeniería Hidráulica.* ISPJAE. 1985, Vol.VI, pp.49-52.

4. DILLA, F. *Obtención de la ley exponencial para flujo no lineal en medios porosos.* Tesis de Maestría. C. de la Habana: ISPJAE, 1974.

5. DILLA, F. Límite superior de validez de la ley de Darcy e inferior de la de flujo turbulento puro. *Ingeniería Hidráulica.* ISPJAE. 1984, Núm. 3.

6. DOMENICO, P.A y SCHWARTZ,W. *Physical and Chemical Hydrogeology.* Second Edition, Wiley.1998.

7. HERNANDEZ, A. Comparación entre las expresiones monómicas y binómica utilizada en el flujo del agua subterránea. *Ingeniería Hidráulica.* ISPJAE, 1982, Núm.1.

8. LINDEBURG,MICHAEL R. *Engineering unit conversions.* Professional Publications, Inc. Fourth Edition.1999.

9. MISSBACH, A. *The permeability of a porous media.* MS Thesis. Mississippi State, USA. 1966.

10. PEREZ, D. *La Explotación del agua subterránea.Un nuevo enfoque.* Ciudad de la Habana: Editorial Científico Técnica, 1995.

11. PORGES, R. E. y HAMMER, M. J. *The compendium of Hydrogeology.* National Ground Water Association, 2001.

12. REDDY,N.B.P. y RAO, P.R.M., Effect of Convergence on non linear flow in porous media. Journal of Hydraulic Engineering. ASCE. 2006, Vol.132, Núm.HY4, pp.420-427.

13. SEN, SEKAI. Non linear flow towards wells. *Journal of Hydraulic Engineering.* ASCE. 1989, Vol.115, Núm.HY2, pp.193-209.

14. SLEPICKA, F. *The laws of filtration and limits of their validity.* International Association for Hydraulic Research. Dubrovnik, Yugoslavia. 9th Convention,1961, pp. 383-394.

15. SLICHTER, C.S. *Theoretical investigation of the motion of ground water:* Washington, D.C., U.S. Geological Survey, 19th Annual Report,1899, part 2, pp. 295-384.

16. VENKATARAMAN, P y RAMA MOHAN RAO, P. Darcian, transitional and turbulent flow through porous media. *Journal of Hydraulic Engineering.* ASCE, 1998, Vol.124, Núm.HY8, pp.840-846.

17. VOLKER, R.E. Non linear flow in porous media by finite elements. *Journal of the Hydraulics Division.* ASCE, 1969, Vol.95, Núm. HY6, pp.2093-2114.

18. WARD, J.C. Turbulent flow in porous media. *Journal of the Hydraulics Division.* ASCE, 1964, Vol.90, Núm. HY5, pp.1-13.

Recibido: Septiembre del 2009
Aprobado: Octubre del 2009