

Presentación de un modelo para la administración óptima de acuíferos

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más serios que en el mundo ocupa a los especialistas relacionados al tema del agua (como recurso aprovechable) es su administración. Sucesos que hay lugares donde dicho recurso es escaso debido a la propia geografía o producto de sequías. En países tropicales como Cuba existen dos tipos de fuentes principales donde se encuentran estos reservorios de agua explotables para el consumo humano, las fuentes superficiales, entiéndase lagos, embalses artificiales etc. y las fuentes subterráneas materializadas por las formaciones geológicas llamadas acuíferos muy aprovechados fundamentalmente en nuestra geografía occidental.

Desde la década de los 60, los sistemas de agua subterránea han sido estudiados mediante modelos matemáticos de simulación los cuales se han venido desarrollando de una forma vertiginosa. En los últimos años los modelos de simulación han sido combinados con técnicas de optimización para determinar la mejor estrategia a seguir en la administración del recurso, con un objetivo específico y una serie de restricciones [1].

En Cuba se dio un salto muy importante en esta rama del conocimiento con la creación en el CIH, del modelo matemático AQÜIMPE que puede ser comprendido como un simulador. Numerosas han sido las aplicaciones de este modelo en acuíferos nacionales e incluso en el extranjero, ver [2].

Sin embargo, solo con una herramienta de simulación como AQÜIMPE no se pueden resolver con rigor científico un conjunto de problemas referentes a la administración y que se recogen en las siguientes interrogantes:

- Dada una demanda conocida en el tiempo para todo el acuífero, ¿De donde extraer este volumen de agua para

Resumen / Abstract

El presente artículo propone un modelo matemático para la administración óptima de la explotación en los acuíferos. Dicho modelo se basa en la introducción del modelo de flujo en medio poroso AQÜIMPE dentro de un algoritmo de Programación lineal. Se plantea la concepción teórica del modelo y finalmente se aplica a un caso de estudio en el cual se evalúan un grupo de funciones objetivo (todas lineales) que responden a maximizar la explotación del sistema acuífero y a minimizar los abatimientos en los nodos de extracción. Este modelo es programado en el asistente matemático MATLAB y está concebido para tener una total relación con el sistema SIG asociado a AQÜIMPE llamado AQTRIGEO.

Palabras clave: Modelo matemático, administración de acuíferos, AQÜIMPE.

In this paper a mathematical model is presented for the optimization of aquifer resources management. The model is based on the porous media flow AQÜIMPE model embedded within a linear programming algorithm. Theoretical considerations are introduced first and then it is applied to a case study in which a number of different linear objective functions (LOF) are tested. One of the LOF's is to maximize the discharge flow from the aquifer and the other LOF is to minimize drawdowns in the discharge nodes. The whole model has been built on the mathematical assistant MATLAB and has been made fully interactive with the GIS tool AQTRIGEO which is associated with AQÜIMPE.

Keywords: mathematical model, aquifer management, porous media flow.

MSc. Eric Cabrera Estupiñán, CIH, Fac. Ing. Civil, CUJAE eric@cih.cujae.edu.cu

Dr. David Marón Domínguez, Dpto. Matemáticas, Fac. Ing. Civil, CUJAE dmaron@civil.cujae.edu.cu

Ing. Ana Virginia Gutiérrez Mendizábal, Consultora Asesoría Ambiental Basterrechea, Guatemala.
vicky_gutierrezm@yahoo.com.mx

garantizar que al final del periodo de explotación los niveles en toda la fuente estén lo más recuperados posible?

- Dada la capacidad máxima y mínima de extracción de cada pozo del acuífero, ¿Cuál es la máxima cantidad de agua a extraer de la fuente por intervalos de tiempo?, impuestas todas las restricciones de niveles y caudales que garanticen vitalidad y no contaminación de la fuente.

Estas y otras interrogantes vitales a resolver para garantizar la forma de administración del acuífero deben ser afrontadas con la ayuda del modelo de simulación pero debe incluirse otra herramienta que conciba un algoritmo de optimización.

Uno de los primeros planteamientos, en Cuba, sobre los patrones óptimos de explotación prolongada en un acuífero fue planteado por [3]. En su trabajo emplea el método de la matriz respuesta o funciones tecnológicas algebraicas (FTA) las que con ayuda del simulador AQÜIMPE permiten encontrar relaciones entre la carga hidráulica y los caudales en los nodos del modelo; luego se emplea un método de optimización, en ese caso se empleó la Programación lineal y de esta forma se pudo resolver varios problema de optimización de naturaleza lineal. En este aporte se trabajó como caso de estudio con el acuífero de Ariguanabo.

Posteriormente se resuelve el problema inverso de estimación de los parámetros K_d (conductividad hidráulica) y E (coeficiente de almacenamiento) para el modelo AQÜIMPE aplicando un algoritmo genético de convergencia global llamado *Shuffled Complex Evolution (SCE)*, ver [4]. En esta misma referencia se plantea que este método también puede ser empleado para resolver problemas referentes a la administración de acuíferos.

En el resto del mundo se han empleado modelos basados en redes neuronales para resolver estos problemas de administración, ver [5] donde es entrenada una red neuronal de programación inversa y usada como un submodelo (dentro de un modelo de programación no lineal denominado *Hooke and Jeeves*) para encontrar políticas óptimas cercanas; las cuales son refinadas al usar un modelo de simulación-optimización convencional. Los resultados indicaron que las redes neuronales basadas en un modelo de simulación-optimización funcionaron satisfactoriamente. Para generar los ejemplares se requiere de un modelo de simulación convencional, y un número suficiente de los mismos para entrenar la red neuronal. Dicho proceso demanda un tiempo considerable.

También se ha difundido el empleo de Algoritmos genéticos para resolver este tipo de problemas, en este caso se refiere a los autores [6] los cuales se dieron a la tarea de obtener soluciones óptimas para los problemas

de planificación de recursos de agua subterránea, mientras se consideraba simultáneamente, el costo fijo (instalación de pozos) y el costo del bombeo. Las soluciones fueron propuestas mediante un procedimiento creado a tal efecto, que integra un algoritmo genético con otro basado en la programación dinámica diferencial con restricciones.

En este sentido es importante plantear que en estos momentos en Cuba no existe un modelo que permita resolver problemas como los planteados anteriormente, es por esa razón que en este trabajo se presenta un aporte en esta dirección.

El modelo propuesto utiliza a AQÜIMPE, el cual es introducido dentro de un modelo de optimización, en este caso, un modelo de programación lineal, para resolver problemas de administración con naturaleza lineal como los enfocados en las preguntas anteriores.

MATERIALES Y MÉTODOS

Dentro de los materiales se utiliza el modelo matemático AQÜIMPE el cual está integrado por un conjunto de programas que simulan numéricamente el flujo lineal no estacionario de un acuífero en medio poroso bidimensional. AQÜIMPE fue concebido para simular acuíferos freáticos o artesianos a escala regional, lo que incluye el tratamiento del acuífero visto en planta. También permite hacerlo a escala local (pozos, campos de pozos, etc.) y problemas vistos en sección. Así mismo es posible simular su interacción con un cuerpo de agua superficial siempre que exista interacción entre ellos.

Al analizar el flujo anteriormente descrito, surge una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo parabólica, con la que se formula el modelo. De dicha ecuación, con término fuente -sumidero y condiciones de contorno filtrante o impermeables, se obtiene la carga hidráulica que depende de las coordenadas del espacio bidimensional (x,y) y del tiempo (t) . La solución se desarrolla a partir del método de los elementos finitos (MEF), utilizando el triángulo cuadrático como elemento, y aplicando la aproximación de Galerkin [7].

Otro de los materiales usados es el asistente matemático MATLAB y el programa realizado a tal efecto en dicho asistente el cual utiliza la función "*Linprog*" que tiene implementado un algoritmo simplex para la programación lineal.

Linprog: es una de las herramientas de optimización, descrita en Matlab que resuelve el problema de programación lineal. En su estado más simple recibe tres argumentos:

$$x = \text{linprog}(c, A, r) \quad (1)$$

Donde c , A y r , son las matrices que intervienen directamente en el problema y x es el vector de variables de decisión que se obtiene, es decir que se resuelve:

$$\min cx \quad Ax \leq r \quad (2)$$

Siendo de igual forma x la respuesta. Si se desea agregar una restricción de igualdad

$$A_{eq}x = r_{eq} \quad (3)$$

Entonces la función queda de la siguiente forma:

$$x = \text{linprog}(c, A, r, A_{eq}, r_{eq}) \quad (4)$$

Mientras que, al ingresar

$$x = \text{linprog}(c, A, r, A_{eq}, r_{eq}, lb, ub) \quad (5)$$

Se estarían definiendo fronteras inferiores y superiores a cada variable de decisión

$$lb \leq x \leq ub \quad (6)$$

Sin embargo, de no existir alguna de las dos fronteras, igualmente se incluye como argumento, pero se le asigna un valor indeterminado. Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} x(i) < lb(i) &\Rightarrow lb(i) = -Inf && 0 \\ x(i) > ub(i) &\Rightarrow ub(i) = Inf \end{aligned}$$

Donde " Inf " representa el concepto de infinito para MATLAB.

Para que se tenga en cuenta un vector inicial de soluciones x_o , la estructura vendría dada por:

$$x = \text{linprog}(c, A, r, A_{eq}, r_{eq}, lb, ub, x_o) \quad (7)$$

DESARROLLO

Fundamentos y estructura general del modelo AQÜIMPE

La ecuación diferencial con que se formula AQÜIMPE para régimen de flujo no estacionario, hidráulicamente confinado y medio poroso homogéneo isotrópico, puede ser escrita de la siguiente forma:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(mKd \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(mKd \frac{\partial h}{\partial y} \right) + E \frac{\partial h}{\partial t} + W = 0 \quad (8)$$

Siendo:

h : carga hidráulica, función que depende de las coordena-

da cartesianas (x,y) y del tiempo t , [L].

m : espesor saturado del acuífero, [L].

Kd : conductividad hidráulica, [LT⁻¹].

E : coeficiente de almacenamiento, coincide con la porosidad efectiva en acuíferos libres.

W : fuente de entrada o salida vertical al elemento, es decir explotación o recarga.

La estrategia que utiliza AQÜIMPE para la modelación del acuífero es: subdividir el área total de la formación acuífera en distintas zonas, atendiendo a las propiedades hidrogeológicas; posteriormente estas zonas son subdivididas en triángulos, donde en cada uno de estos las propiedades hidrogeológicas son iguales. En estos triángulos se definen una serie de nodos, en los cuales al solucionar el problema se obtendrá el valor de h ; por lo tanto, se tendrá la solución en todos los nodos de la malla que se forma con la unión de todos los triángulos.

Como se expresó anteriormente AQÜIMPE está desarrollado a partir del método de los elementos finitos MEF y utiliza el triángulo cuadrático para su discretización espacial. En dicho triángulo o elemento se emplean los nodos vértices y los intermedios de los lados de los triángulos donde la superficie resultante en cada elemento es parabólica; esto trae consigo varias ventajas las cuales pueden ser consultadas en [8].

No es objetivo de este trabajo plantear todo el desarrollo del MEF aplicado a la ecuación (8) el cual puede ser consultado en [9], se prefiere ilustrar el sistema matricial que se obtiene después de la resolución de las integrales que se generan con la aproximación de Galerkin a (8):

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{ne} (\omega[R] + [S]) \{h_e\}^k &= \sum_{e=1}^{ne} ([S] - (\omega - 1)[R]) \{h_e\}^{k-1} \dots \\ \dots + \sum_{e=1}^{ns} -Qs_e^k \frac{A_e}{3} \{000111\}^k &+ \sum_{j=1}^{np} -Qp_j^k \{0\dots100\}^k \dots \\ &+ \sum_{i=1}^{nl} -Ql_i^k \frac{L_i}{6} \{114\}^k \end{aligned} \quad (9)$$

donde:

$$[R] = m_e \frac{A_e}{3} Kd_e [Kab]_{6 \times 6}^e \text{ se conoce como matriz de}$$

rigidez del elemento.

m_e : espesor saturado promedio del elemento e , [L]

A_e : área del elemento e , [L²]

Kd_e : conductividad hidráulica del elemento e , [LT⁻¹]

$[Kab]_{6 \times 6}^e$: matriz simétrica cuadrada de orden 6, cuyos valores son los mismos para todos los tiempos de un elemento e , pero diferentes para todos los elementos.

$$[S] = \frac{E_e A_e}{180 \Delta t} [Kcte]_{6 \times 6} \text{ matriz constante}$$

Δt : cantidad de unidades de tiempo en el intervalo de tiempo.

$[Kcte]_{6 \times 6}$: matriz constante para todos los elementos en todos los tiempos, ver [2].

$\{h_e\}_{6 \times 1}^k$: valor de las h del elemento e , cada elemento del vector está referido a uno de los seis nodos del triángulo y depende del tiempo k . [L]

$\{h_e\}_{6 \times 1}^{k-1}$: igual al anterior pero en el tiempo previo. [L]

Q_s^k : caudal superficial, en forma de intensidad que entra al elemento e , (lluvia que filtra hasta el acuífero en el tiempo k). [LT⁻¹]

Q_p^k : caudal puntual que entra o sale al nodo j de explotación o de inyección en el tiempo k . [L³T⁻¹]

Q_l^k : caudal lateral que entra o sale del acuífero por el lado i (de un triángulo o elemento). [L²T⁻¹]

L_i : longitud del lado i . [L]

$\{000111\}_{6 \times 1}'$: vector columna, los tres primeros valores son los referentes a los nodos principales y el resto a los nodos secundarios.

$\{0 \dots 100\}_{n \times 1}'$: vector columna que tiene tantos elementos como nodos de la malla y en él tienen valor uno los referentes a los nodos donde hay gasto puntual.

$\{114\}_{3 \times 1}'$: vector columna de tres elementos garantiza que en los lados donde hay gasto lateral se reparten 1/6 de este caudal a cada nodo principal y los restantes 2/3 al nodo secundario.

n : número total de nodos de la malla.

nl : número de lados de triángulos con salidas o aportes laterales (zonas del acuífero que tienen frontera con un río, etc.).

np : número de nodos con gastos puntuales.

ns : número de triángulos con entradas o salidas superficiales.

ne : número total de elementos (triángulos).

j : contador de nodos con gastos puntuales.

i : contador de lados con gasto lateral.

e : contador de elementos.

ω : tiene un valor de 2/3 si se obtiene por el MEF.

Cuando se aplica esta expresión a un acuífero confinado, el problema se restringe a resolver k veces el sistema (9), el cual puede ser escrito como un sistema de ecuaciones lineales como el siguiente:

$$[M]_{n \times n} \{h\}_{n \times 1}^k = \{f\}_{n \times 1} \quad (10)$$

Obsérvese que $[M]$ es una matriz cuadrada de orden n , donde cada fila está asociada a cada uno de los nodos de la malla, esta correspondencia es de forma creciente. Lo mismo sucede con las columnas. En el vector h se guardan las variables a calcular en cada tiempo; y f es el vector de los términos independientes donde se almacena el efecto de los caudales extraídos e incorporados al modelo en cada nodo. Este sistema puede ser resuelto por cualquier método directo o indirecto que resuelva sistemas de este tipo.

Al inicio de cada tiempo k la matriz $[M]$ es nula, y en ella se van ubicando (en las posiciones correspondientes) los elementos de la matriz resultante de la suma de $(\omega[R] + [S])$. A este proceso se le llama ensamblaje, y concluye cuando se analizan todos los elementos de la malla en el tiempo k . Es de hacer notar que el término

$\{h_e\}_{6 \times 1}^{k-1}$ es siempre conocido para el tiempo k por lo que todos los sumandos del miembro derecho de la ecuación (9) pueden ser ensamblados en el vector f y así para cada tiempo se van obteniendo los niveles piezométricos h en todos los nodos, con la información de los niveles en el tiempo anterior.

MODELOS DE SIMULACIÓN - OPTIMIZACIÓN DE AGUAS SUBTERRÁNEAS

Las técnicas de optimización son un conjunto de programas matemáticos que están relacionados con la asignación óptima de los recursos a los usuarios competentes. Una de las características más importantes de estos modelos, es que requieren que el criterio de diseño del problema sea declarado explícitamente en términos de objetivos y restricciones, primero en palabras y luego matemáticamente. Los tres elementos del problema son:

- Un conjunto de variables de decisión, que son los controles del recurso hidráulico y están para ser diseñados, por ejemplo, los caudales de extracción del agua subterránea.

- Una función objetivo, puede estar en términos de los recursos hidráulicos que van a ser gestionados, por ejemplo maximizar la extracción de agua subterránea.

- Y una serie de restricciones, incluyendo factores físicos, económicos y legales que restringen los valores de

las variables de decisión y la función objetivo.

Funciones objetivo y restricciones.

A continuación se presentan un conjunto de funciones objetivo presentadas en [3], las cuales tienen una gran vigencia y algunas serán utilizadas en el trabajo.

a) Maximizar la suma de las cargas en los nodos de extracción del modelo en todos los tiempos. De esta forma se satisface la demanda con la menor afectación al acuífero.

$$F.O = \max \sum_{j=1}^{np} \sum_{k=1}^T h_j^k \quad (11)$$

b) Minimizar los abatimientos S al final del período de bombeo T .

$$F.O = \min \sum_{j=1}^{np} S_j^T \quad (12)$$

c) La mayor capacidad de extracción de un acuífero se obtiene al maximizar los caudales en los pozos de explotación en todos los tiempos.

$$F.O = \max \sum_{j=1}^{np} \sum_{k=1}^T Q_j^k \quad (13)$$

d) Minimizar el costo de bombeo, el cual depende de las cargas hidráulicas y del gasto.

$$F.O = \min \sum_{j=1}^{np} \sum_{k=1}^T v_j^k (j+r)^{-1} Q_j^k (L_j^{k-1} + h_j^k - h_j^{k-1}) \quad (14)$$

donde:

v_j^k : es el costo unitario de bombeo por elevación.

r : tasa de descuento.

L_j^{k-1} : elevación inicial.

En general, las restricciones pueden resumirse en tres tipos:

1) Las demandas D en cada período deben satisfacerse, este conjunto de restricciones genera T ecuaciones.

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{k=1}^T Q_j^k \geq D_j \quad (15)$$

2) El caudal de extracción de cada nodo de bombeo del modelo no debe sobrepasar la capacidad máxima proyectada para los pozos asociados a este; aunque al menos debe entregar una demanda local especificada. Dicha serie de restricciones genera $T \times np$ ecuaciones (por cada límite), es decir $2T \times np$ ecuaciones en total.

$$Q_j^{mín} \leq Q_j^k \leq Q_j^{máx} \quad (16)$$

3) Al final del período de bombeo, se deben controlar los abatimientos. En este caso se generan np ecuaciones.

$$S_j^T \leq S_{máx}^k \quad (17)$$

S_j^T : abatimiento en el nodo de extracción j (diferencia entre carga inicial y final en dicho nodo).

$S_{máx}^k$: diferencia entre la carga inicial y la crítica en el pozo j .

Modelo general propuesto para la optimización.

Analizando las funciones objetivos definidas anteriormente se pueden definir a las expresadas en (11), (12) y (13) como funciones lineales de sus variables, en este sentido es posible emplear un algoritmo de programación lineal para resolver los problemas de optimización que sugieren dichas expresiones [3].

Como se expresó con anterioridad, en [3] se utilizaron las llamadas funciones tecnológicas algebraicas para encontrar relaciones entre los caudales y niveles en los nodos del modelo (dichas funciones se obtienen gracias a un gran número de corridas del modelo AQÜIMPE), para posteriormente someter a las mismas a un modelo de programación lineal; sin embargo en este trabajo se propone sustituir estas funciones tecnológicas algebraicas por el modelo AQÜIMPE propiamente dicho e introducir todas sus ecuaciones dentro del modelo de programación lineal, empleando para tal efecto la función *Linprog* de MATLAB. Es importante plantear que este modelo será efectivo para acuíferos confinados o acuíferos libres que en su modelación puedan ser tratados como confinados, [2].

El modelo de programación lineal quedaría de la siguiente forma:

- *Función objetivo:* Cada vez que se ejecute el modelo es porque se desea resolver un problema específico que tendrá que ver algunas de las expresiones (11), (12) o (13), luego será una de ellas la que se decida para cada ejecución. Además se debe tener en cuenta que las variables de decisión del modelo son los caudales en los nodos de explotación que se quieran optimizar y en cada tiempo

Q_j^k y todos los niveles en los nodos del modelo en cada tiempo.

En esta función objetivo se debe declarar un vector de costo c , ver (2), el mismo tiene una fila y $((n \times nt) + (nt \times np))$ columnas. Todos sus elementos son cero, excepto los que estén implicados en la función objetivo que se esté analizando los que toman un valor de -1.

- *Restricciones de igualdad:* Estas vienen expresadas en *Linprog* con (3) y tienen una gran importancia ya que es en este sistema de ecuaciones donde se incluyen todas las ecuaciones del modelo AQÜIMPE, es decir, el modelo no encuentra tiempo a tiempo con (10) los niveles en los nodos, como lo hace cuando simula, sino que tiempo a tiempo el sistema (10) se va incluyendo dentro de otro sistema mayor que es el representado en (3) quedando una gran matriz *Aeq* con $(n \times nt)$ filas y $((n \times nt) + (nt \times np))$ columnas, donde están todas las variables de decisión y el efecto del modelo recogidos. El vector *beq* queda con $((n \times nt) + (nt \times np))$ filas y 1 columna. Cuando se resuelve la programación lineal es que se obtienen todos los niveles en todos los nodos y en todos los tiempos (de una vez).

nt: Número de tiempos a simular

- *Restricciones de desigualdad:* Las restricciones de desigualdad son inecuaciones que permitirán introducir en el modelo las importantes restricciones que se abordaron en (15), (16), (17). La restricción (15) se introduce mediante las matrices *A* y *r* de (2) y es importante comprobar que el modelo asume estas restricciones como de desigualdad del tipo *menor o igual que*, si fueran diferentes se debe multiplicar por -1 a las ecuaciones correspondientes.

La matriz *A* queda con (nt) filas y $((n \times nt) + (nt \times np))$ columnas y los vectores *x* y *b* quedan con $((n \times nt) + (nt \times np))$ filas y 1 columna y (nt) filas por 1 columna respectivamente.

Para introducir las otras restricciones (16) y (17) se utilizan los vectores de fronteras inferiores y superiores $\{lb\}$ y $\{ub\}$, cada uno de estos vectores tiene dimensiones de $((n \times nt) + (nt \times np))$ filas y una columna. El valor de cada elemento de los vectores, es el mínimo o máximo respectivamente, que puede tener su variable de decisión asociada.

Para que se tenga una idea del orden de las matrices que se manejan con el método, se supone una triangulación con 100 nodos (entre principales y secundarios). Además 12 tiempos de simulación y extracción de 10 nodos del modelo. Por lo tanto, las matrices y vectores quedarían con las siguientes dimensiones:

$$\begin{array}{lll}
 [Aeq]_{1200 \times 1320} & \{x\}_{1320 \times 1} & \{beq\}_{1200 \times 1} \\
 [A]_{12 \times 1320} & \{x\}_{1320 \times 1} & \{b\}_{12 \times 1} \\
 \{lb\}_{1320 \times 1} & \{ub\}_{1320 \times 1} & \{c\}_{1 \times 1320}
 \end{array}$$

Lo cual significa que este problema tendría 1200 ecuaciones de igualdad, 1320 variables de decisión, 12

restricciones de desigualdad, 1320 límites inferiores, superiores y costos.

La explicación detallada del proceso de concepción del modelo puede encontrarse en [2].

EJEMPLO DE APLICACIÓN

El objetivo de este ejemplo es mostrar numéricamente como se puede aplicar el modelo de administración propuesto. Con este fin se realizan un conjunto de variantes de optimización donde se cambian algunos parámetros de la Programación lineal, como son la función objetivo y los valores máximo y mínimo de alguna de las variables de decisión.

Descripción de los datos:

El acuífero a modelar se considera confinado y el mismo puede ser discretizado solamente con dos triángulos o elementos, ver figura 1,. Se va a trabajar con dos intervalos de tiempo.

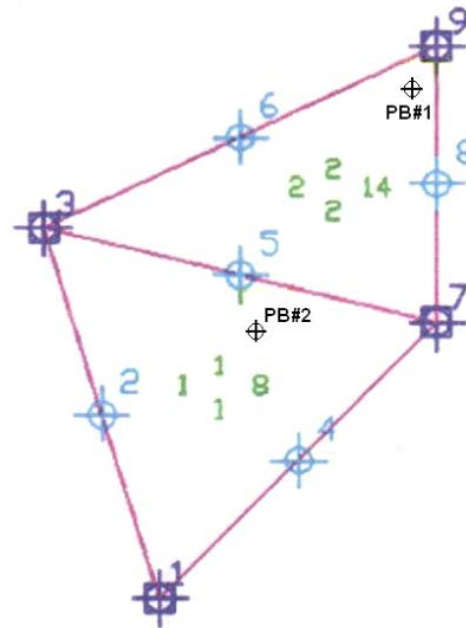


Figura 1. Triangulación realizada en AQTRIGEO para el ejemplo de aplicación

Obsérvese que los nodos principales o vértices y los secundarios o intermedios de los triángulos están enumerados y tienen formas y colores diferentes. Por otra parte, es importante señalar que existen dos pozos de explotación PB#1 y PB#2, los cuales se encuentran en los triángulos 1 y 2 respectivamente y están muy cercanos a los nodos 5 y 9 por lo tanto toda la explotación que se realice en el pozo PB#1 será asignada al nodo del modelo 9 y lo mismo con el pozo PB#2 y el nodo 5.

TABLA I- CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES DE LOS ELEMENTOS

Elemento	Nodos vértices			Nodos secundarios			Material	Esp/cota (m)	Grupo
1	1	7	3	4	5	2	1	8	1
2	3	7	9	5	8	6	2	14	2

TABLA II- COORDENADAS DE LOS NODOS PRINCIPALES

# de orden	nodo	x (m)	y (m)
1	1	800.00	500.00
2	3	550.00	1300.00
3	7	1400.00	1100.00
4	9	1400.00	1700.00

TABLA III- CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA Y COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO POR GRUPO.

grupo	Kd(m/d)	E
1	120	0.008
2	500	0.024

TABLA IV- ESTADO INICIAL DEL ACUIFERO

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h° (m)	85.34	86.01	85.81	84.98	85.00	85.66	84.53	84.67	85.63

En la tabla 1, la columna de material identifica con el mismo número, a los elementos que tengan iguales parámetros hidráulicos, es decir conductividad hidráulica Kd y coeficiente de almacenamiento E. Por otra parte en la columna esp/cota se coloca el espesor medio del elemento (acuífero confinado), o la cota del impermeable (acuífero libre); en este caso se está planteando que los electos tienen espesores de 8m y 14 m, respectivamente. Finalmente se clasifican en un mismo grupo, los elementos cuyo tratamiento de recarga de agua al acuífero sean iguales.

Las coordenadas en el espacio (x, y) de los nodos principales de la malla aparecen en la tabla II. Los valores de Kd y E de cada uno de los materiales se muestran en la tabla III. El estado inicial del acuífero en los nodos del modelo se brinda en la tabla IV.

Es importante decir que a pesar de que AQUIMPE permite introducir o extraer caudal del acuífero por sus lados o de forma superficial como recarga por elementos, en este ejemplo se prefirió no introducir estos flujos ya que no son necesarios para mostrar las potencialidades de la herramienta propuesta.

Problemas a resolver:

1- Determinar cuál es el caudal a extraer de los nodos 5 y 9 en cada tiempo para garantizar una determinada demanda. Se tienen restricciones en cuanto a la capacidad de bombeo en los nodos y además se quiere cumplir con las premisas de (11) y (12).

2- Obtener el máximo caudal a extraer de los nodos 5 y 9 en cada tiempo para garantizar una determinada demanda. Que cumpla con restricciones de capacidad de bombeo así como no deprimir al acuífero más de lo establecido (en los nodos donde el usuario decida).

A continuación se colocan las funciones objetivos que se van a utilizar en la optimización y el problema en que van a ser empleadas.

Función objetivo #1 - Problema 1

$$F.O = \max \sum_{j=1}^{np} \sum_{k=1}^T h_j^k = \max (h_5^1 + h_9^1 + h_5^2 + h_9^2) = \dots$$

$$\dots \min (-h_5^1 - h_9^1 - h_5^2 - h_9^2) \tag{18}$$

Esta última expresión es la que se utiliza ya que el algoritmo implementado en *Linprog* solamente minimiza.

En este caso el vector de costos c es un vector de 22 elementos donde todos son cero excepto las posiciones correspondientes a los nodos 5 y 9 en cada tiempo que tienen valor de -1.

Función objetivo #2 - Problema 1

$$\begin{aligned}
 F.O &= \min \sum_{j=1}^{np} S_j^T = \min \sum_{j=1}^{np} h_j^o - h_j^T = \dots \\
 \dots \min &[(h_5^o - h_5^2) + (h_9^o - h_9^2)] = \dots \\
 \dots \min &[(h_5^o + h_9^o) + (-h_5^2 - h_9^2)] \quad (19)
 \end{aligned}$$

En esta última expresión el término $(h_5^o - h_9^o)$ es un valor constante, por lo tanto en este caso la función objetivo solamente tiene que minimizar el segundo término, quedando:

$$F.O = \min(-h_5^2 - h_9^2) \quad (20)$$

En este caso el vector de costos c también tiene 22 elementos donde todos son cero excepto las dos posiciones correspondientes a los nodos 5 y 9 en el tiempo #2 que tienen valor de -1.

Función objetivo #3 - Problema 2

$$\begin{aligned}
 F.O &= \max \sum_{j=1}^{np} \sum_{k=1}^T Q_j^k = \max(Q_5^1 + Q_5^2 + Q_9^1 + Q_9^2) = \dots \\
 \dots \min &(-Q_5^1 - Q_5^2 - Q_9^1 - Q_9^2)
 \end{aligned}$$

el vector de costos c para este problema tiene 22 elementos donde todos son cero excepto las cuatro posiciones correspondientes a los caudales 5 y 9 en los dos tiempos que tienen valor de -1.

En todos estos casos el modelo AQÜIMPE se introduce en el sistema (3) quedando estas matrices con las siguientes dimensiones, ver [2]:

$$[Aeq]_{18 \times 22} \quad \{x\}_{22 \times 1} \quad \{beq\}_{18 \times 1}$$

Las restricciones de desigualdad para este ejemplo se considerarán de la forma:

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{k=1}^T Q_j^k \geq 1000m^3 / d$$

Esto implica que:

$$Q_5^1 + Q_9^1 \geq 1000 \text{ y } Q_5^2 + Q_9^2 \geq 1000 \quad (21)$$

Estas dos inecuaciones se contemplan en *Linprog*, como el sistema (2).

Modelo directo

Antes de comenzar a resolver los dos problemas planteados se prefiere realizar una simulación con AQÜIMPE (modelo directo) que servirá para ser comparada con las posteriores soluciones óptimas. A tal efecto se considerará en el nodo 5 para ambos tiempo un caudal de $Q_5^1 = Q_5^2 = 600m^3 / día$ y en el nodo 9 $Q_9^1 = Q_9^2 = 400m^3 / día$.

Para estas condiciones, los resultados de la simulación se recogen en la tabla V, donde se ubican los valores calculados de la carga hidráulica en todos los nodos del modelo.

Con los resultados obtenido hasta este momento no se puede asegurar que esta pareja de caudales con las que se ejecutó AQÜIMPE cumplen las premisas expresadas en (11) y (12), véase que estos caudales fueron escogidos arbitrariamente y cumplen la condición de al menos garantizar la entrega de la demanda por cada intervalo de tiempo.

Solución del problema 1.

Para este problema se utilizarán dos variantes de optimización que están en correspondencia con las expresiones (19) y (20).

Variante 1 de optimización

A los efectos del modelo implementado en MATLAB, las restricciones de igualdad y de desigualdad ya están definidas, así como las funciones objetivo, solamente queda definir los límites inferiores y superiores que pueden llegar a tener las variables de decisión.

$$0 \leq h \leq +\infty$$

Y en el caso de los caudales:

$$0 \leq Q_5^1 \leq 850 \quad 0 \leq Q_9^1 \leq 210$$

$$0 \leq Q_5^2 \leq 850 \quad 0 \leq Q_9^2 \leq 210$$

TABLA V- ESTADO INICIAL Y CARGAS OBTENIDAS POR AQÛIMPE

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h^o (m)	85.340	86.010	85.810	84.980	85.000	85.660	84.530	84.670	85.630
h^1 (m)	81.816	81.790	81.705	81.783	81.684	81.690	81.693	81.670	81.591
h^2 (m)	78.338	78.310	78.230	78.310	78.212	78.217	78.225	78.201	78.120

TABLA VI- ESTADO INICIAL Y CARGAS OBTENIDAS POR EL MODELO DE OPTIMIZACION EN LA VARIANTE 1.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h^o (m)	85.340	86.010	85.810	84.980	85.000	85.660	84.530	84.670	85.630
h^1 (m)	81.805	81.777	81.688	81.774	81.672	81.691	81.693	81.694	81.665
h^2 (m)	78.326	78.299	78.211	78.299	78.200	78.219	78.225	78.224	78.194

Al ejecutar el modelo se obtienen los siguientes resultados.

$$Q_5^1 = Q_5^2 = 850m^3/d \text{ y } Q_9^1 = Q_9^2 = 150m^3/d$$

Para comparar esta solución con la obtenida en el modelo directo se deben calcular los valores de las funciones objetivo como se muestra a continuación:

$$FO_{\text{modelo-directo}}^1 = h_5^1 + h_9^1 + h_5^2 + h_9^2 = \dots$$

$$\dots 81.684 + 81.591 + 78.212 + 78.120 = 319.606m$$

$$FO_{\text{modelo-opt-var1}}^1 = h_5^1 + h_9^1 + h_5^2 + h_9^2 = \dots$$

$$\dots 81.672 + 81.665 + 78.200 + 78.194 = 319.733m$$

Al evaluar los resultados en la segunda función objetivo se obtiene.

$$FO_{\text{modelo-directo}}^1 = (h_5^o + h_9^o) - (h_5^2 + h_9^2) = \dots$$

$$\dots (85.000 + 85.630) - (78.212 + 78.120) = 14.298m$$

$$FO_{\text{modelo-opt-var1}}^1 = (h_5^o + h_9^o) - (h_5^2 + h_9^2) = \dots$$

$$\dots (85.000 + 85.630) - (78.200 + 78.194) = 14.235m$$

La diferencia entre los valores brindados por los dos modelos, al evaluar la primera función objetivo es de 12.70 cm, aproximadamente. Los resultados demuestran que, al utilizar el modelo de optimización (variante 1), el acuífero queda más recuperado que al usar el modelo de simulación, ello en cuanto a sus niveles en los pozos de explotación.

Un análisis similar se puede realizar con los valores obtenidos en la función objetivo 2. En este caso, la diferencia entre los abatimientos es aproximadamente, de 6.36 cm. Los resultados indican que al usar el modelo de

optimización, la suma de los abatimientos en los pozos de bombeo es menor.

Otro de los resultados interesantes de esta respuesta son los valores de los caudales; recuérdese que en esta variante se le dio la posibilidad de que oscilaran, en el nodo 5 entre (0 y 850) u en el 9 entre (0 y 210). Como consecuencia, el sistema prefiere que del nodo 5 se extraiga toda el agua que se pueda (en este caso los 850 m³/d) y en el otro nodo que se saque la cantidad mínima para cumplir con la restricción de demanda. Esto es interesante, ya que en teoría, del nodo 9 se puede extraer más agua; sin embargo el modelo reconoce que esto implicaría que los niveles en el acuífero bajen y no estaría siendo consecuente con el cumplimiento de las funciones objetivo (19) y (20).

Comparando las variantes antes analizadas, se puede decir que de ambas se extrae la misma cantidad de agua del acuífero, pero de forma diversa, y a los efectos de cumplir con las funciones objetivo (19) y (20), es mejor asignarle la mayor explotación al nodo 5 (como quedó demostrado en la variante 1).

Variante 2 de optimización

Podría pensarse que los resultados obtenidos en la variante 1, son la mejor combinación de caudales para satisfacer las funciones objetivo analizadas, sin embargo eso está por comprobarse. Hasta este punto solo se ha podido constatar la tendencia que existe en el modelo de asignarle más extracción al nodo 5 que al 9, es por eso que se propone otra variante en la cual.

$$0 \leq Q_5^1 \leq 1100 \quad 0 \leq Q_9^1 \leq 210$$

$$0 \leq Q_5^2 \leq 1100 \quad 0 \leq Q_9^2 \leq 210$$

Obsérvese que con estos valores se le está dando la posibilidad al modelo de decidir sacar toda la demanda de agua (1000 m³/d), en cada tiempo, del nodo 5. Cuando se ejecuta el modelo se obtienen los siguientes resultados,

$$Q_5^1 = Q_5^2 = 1000m^3 / d \text{ y } Q_9^1 = Q_9^2 = 0m^3 / d$$

TABLA VII- ESTADO INICIAL Y CARGAS OBTENIDAS POR EL MODELO DE OPTIMIZACION EN LA VARIANTE 2.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h^o (m)	85.340	86.010	85.810	84.980	85.000	85.660	84.530	84.670	85.630
h^1 (m)	81.798	81.770	81.678	81.768	81.665	81.692	81.694	81.707	81.710
h^2 (m)	78.319	78.291	78.201	78.294	78.193	78.220	78.226	78.238	78.239

A continuación se muestra el valor de la función objetivo 1.

$$FO_{\text{modelo-opt-var1}}^1 = h_5^1 + h_9^1 + h_5^2 + h_9^2 = \dots$$

$$\dots 81.665 + 81.710 + 78.193 + 78.239 = 319.810m$$

Este resultado demuestra que el acuífero queda menos afectado que al utilizar el método directo, pues su recuperación asciende a unos 20.30 cm (que es la diferencia entre los resultados obtenidos por los dos métodos). Dicha diferencia indica que incluso esta variante ofrece mejores resultados que la variante 1.

Al evaluar las cargas obtenidas en la segunda función objetivo, se obtuvo.

$$FO_{\text{modelo-opt-var2}}^2 = (h_5^o + h_9^o) - (h_5^2 + h_9^2) = \dots$$

$$\dots (85.000 + 85.630) - (78.193 + 78.239) = 14.197m$$

Lo cual es consistente con la conclusión anterior, ya que la diferencia entre este valor y el del modelo directo es aproximadamente unos 12.20 cm, demostrando que la suma de los abatimientos también es menor que la obtenida en la variante 1.

En las figuras siguientes se muestra, con mapas digitales, las cargas obtenidas en el tiempo 1 en las variantes de optimización 1 y 2. Véase en la figura 2 (vinculada a la variante 1) cómo se encuentran deprimidos los niveles en los nodos 5 y 9, debido a la extracción que se realiza en ambos nodos. Sin embargo esta depresión es más aguda en el nodo 5 (ya que del mismo se obtiene la mayoría del caudal requerido), cuyo efecto es perceptible con apoyo del mapa de vectores que se encuentra superpuesto a la superficie freática. Dicho mapa ofrece una clara idea del movimiento del agua subterránea.

Mientras que en la figura 3, referente a la variante 2, solamente se deprime el nivel en el nodo 5.

Esto ocurre ya que el algoritmo de optimización propuso que toda la demanda fuera extraída de este nodo.

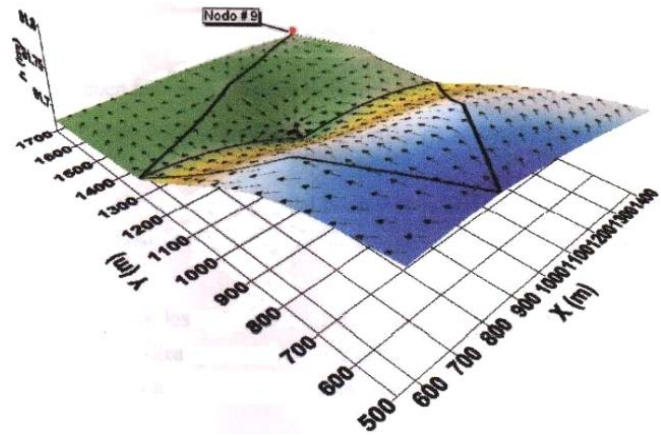


Figura 2. Superficie freática con mapa vectorial referente al tiempo 1 para la variante 1.

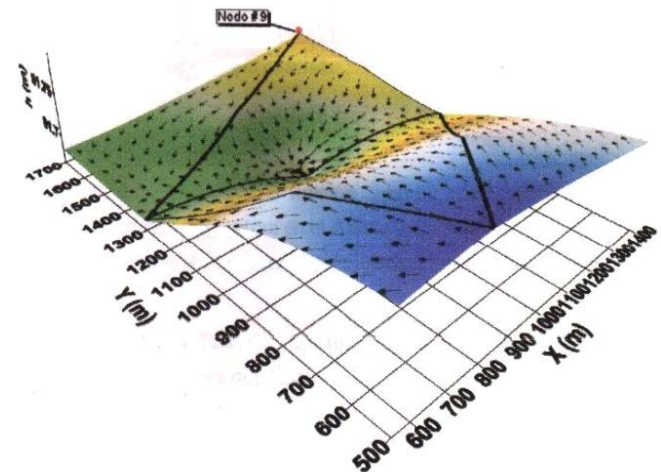


Figura 3. Superficie freática con mapa vectorial referente al tiempo 1 para la variante 2.

Solución del problema 2. (máxima explotación)

Este es un problema muy interesante que puede ser modelado con la función objetivo lineal (13), la cual garantiza la máxima explotación del acuífero. Para el caso en estudio se mantendrán las mismas restricciones de demanda definidas en la ecuación (21), por lo tanto una primera respuesta rápida al problema planteado sería entregar los caudales asociados a los límites superiores de estas variables, ya que de esta forma se estaría maximizando la explotación del acuífero, sin embargo con esta condición de máxima explotación viene implícita la

disminución de los niveles piezométricos en el acuífero fundamentalmente en los nodos de mayor explotación y en la práctica sucede que existen nodos en los cuales dicho nivel piezométrico no puede ser inferior a una cota conocida, el hecho de tener en cuenta este aspecto enriquece más las potencialidades del modelo ya que son restricciones adicionales que se le tienen que introducir al modelo para que brinde una solución con un sentido práctico superior.

Variante 3 de optimización

En esta variante las matrices y vectores (A, Aeq, b, beq, c) ya fueron definidas anteriormente. Solamente queda definir los límites de las variables de decisión.

Los valores de caudales están definidos en:

$$0 \leq Q_5^1 \leq 1100 \quad 0 \leq Q_9^1 \leq 210$$

$$0 \leq Q_5^2 \leq 1100 \quad 0 \leq Q_9^2 \leq 210$$

En el caso de los niveles todos con excepción del 5 están definidos entre (LB=0 y UB=Inf). En esta primera variante se le pondrá un límite inferior LB al nodo 5 de 77.00 m, es decir, la solución de caudales que encontrará el modelo no puede permitir que los niveles en el nodo 5 en ninguno de los tiempos, (en nuestro caso 1 y 2) estén por debajo de los 77.00 m.

Cuando se ejecuta el modelo se obtienen los siguientes resultados:

$$Q_5^1 = 1100m^3 / d, \quad Q_5^{21} = 826m^3 / d \quad y$$

$$Q_9^1 = Q_9^2 = 210m^3 / d$$

Obsérvese que en el primer tiempo se extrae del acuífero todo lo posible, hasta las restricciones superiores de caudal de los nodos 5 y 9, sin embargo en el segundo tiempo, del nodo 9 si se puedan extraer los 210 m3/d pero del nodo 5, justo donde mayor es la explotación, si se extrajeran los posibles 1100 m3/d el nivel estaría por debajo de los 77.00 m es por eso que el modelo restringe a 826 m3/d la explotación y garantiza el nivel mínimo de 77.00 m en el nodo, ver tabla VIII.

El valor de la función objetivo es:

$$FO_{\text{modelo-opt-var 3}}^3 = Q_5^1 + Q_5^2 + Q_9^1 + Q_9^2 = \dots$$

$$\dots 1100 + 826 + 210 + 210 = 2346m^3 / d$$

Variante 4 de optimización

Esta variante solamente se diferencia de la anterior en que se modifica el valor del límite inferior LB al nodo 5, de 77.00 m a 76.00 m.

Cuando se ejecuta el modelo se obtienen los siguientes resultados:

$$Q_5^1 = Q_5^2 = 1100m^3 / d \quad y \quad Q_9^1 = Q_9^2 = 210m^3 / d$$

Obsérvese que en esta variante el modelo tiene la posibilidad de disminuir el nivel el nivel en el nodo 5 hasta 76.00 m, un metro menos que la variante anterior y por ese motivo se extrae todo lo posible de ambos nodos en los dos tiempos y aún así el nivel en el nodo 5 tiempo 2 no llega a ser el mínimo posible 76.00 m, para que esto sucediera sería necesario permitirle al modelo extraer más caudal de 5, pero esto con las restricciones de demanda impuestas no es posible.

TABLA VIII- ESTADO INICIAL Y CARGAS OBTENIDAS POR EL MODELO DE OPTIMIZACION EN LA VARIANTE 4.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h^o (m)	85.340	86.010	85.810	84.980	85.000	85.660	84.530	84.670	85.630
h¹ (m)	80.758	80.723	80.607	80.719	80.588	80.612	80.616	80.614	80.574
h² (m)	77.131	77.102	77.013	77.103	77.000	77.017	77.023	77.017	76.975

TABLA IX- ESTADO INICIAL Y CARGAS OBTENIDAS POR EL MODELO DE OPTIMIZACION EN LA VARIANTE 5.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h^o (m)	85.340	86.010	85.810	84.980	85.000	85.660	84.530	84.670	85.630
h¹ (m)	80.758	80.723	80.607	80.719	80.588	80.612	80.616	80.614	80.574
h² (m)	76.204	76.168	76.054	76.169	76.039	76.063	76.072	76.068	76.027

El valor de la función objetivo es:

$$FO_{\text{modelo-opt-var 4}}^3 = Q_5^1 + Q_5^2 + Q_9^1 + Q_9^2 = \dots$$

$$\dots 1100 + 1100 + 210 + 210 = 2620m^3 / d$$

Con esta variante se concluyen los análisis realizados en el caso de estudio donde fueron aplicadas las funciones objetivo (11, 12 y 13) para resolver los problemas de asignación de la explotación y de máxima explotación posible y se presentó un modelo de optimización basado en la técnica de programación lineal a la cual se le introdujo las formulaciones del modelo AQÜIMPE como ecuaciones de restricción.

■ RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La originalidad del algoritmo propuesto se basa en introducir las ecuaciones, que emplea AQÜIMPE para modelar acuíferos, como restricciones de igualdad al emplear la programación lineal como técnica de optimización.

Como en el modelo de optimización propuesto en este trabajo, AQÜIMPE está dentro del algoritmo de programación lineal, es de esperar que el tiempo de cómputo sea menor al que utilizarían las FTA, anteriormente citadas en los trabajos de [3]. Esto se debe a que un modelo de optimización basado en las FTA y un algoritmo de PL, necesitaría una rutina para la confección de las FTA (las cuales se obtienen con un número elevado de corridas de AQÜIMPE), una vez obtenidas las FTA, se introducen en el modelo de programación lineal y se resuelve el problema de optimización. Por lo que se puede hacer una analogía entre las FTA y las ecuaciones del modelo AQÜIMPE. Esta es una hipótesis a comprobar en futuros trabajos, además sería interesante contar con un modelo basado en las FTA para comprobar con otros métodos.

El modelo propuesto no realiza la calibración automática del acuífero por lo que hay que darle como dato las propiedades (Kd y E).

Con el algoritmo propuesto se resuelven dos problemas de administración de acuíferos, mediante tres funciones objetivo y tres restricciones, para lo cual se analizaron 5 variantes (incluyendo la corrida del modelo directo). Con estas variantes y apoyados de gráficos y tablas se demostró que el modelo es consistente.

■ CONCLUSIONES

Se realiza un breve análisis de los métodos empleados en Cuba y en el extranjero para resolver este tipo de problemas.

Se realiza la concepción teórica general de un modelo de optimización para la administración de la explotación de acuíferos hidráulicamente confinados. Este modelo está basado en la inclusión del modelo AQÜIMPE en un algoritmo de programación lineal.

Este modelo es programado en MATLAB para un pequeño caso de estudio. Con este caso se pudo corroborar que la estrategia utilizada para introducir al modelo AQÜIMPE dentro del algoritmo de programación lineal es correcta.

■ RECONOCIMIENTOS

Se realiza un especial reconocimiento al Dr. José Bienvenido Martínez Rodríguez, creador de la tecnología AQÜIMPE, por sus certeros consejos para acometer la tarea de concebir este modelo.

Así como a los especialistas Dr. Félix Dilla Salvador y Dr. Armando Hernández Valdés del Centro de Investigaciones Hidráulicas (CIH).

■ REFERENCIAS

- [1] Galloway, D. L.; Alley, W. M.; Barlow, P.M.; Reilly, T.E.; Tucci, P. (2003). *Involving issues and Practices in Managing Ground-Water Resources. Case Studies on the Role of Science*. U. S. Department of interior, U.S. Geological Survey, Circular 1247; 19-24.
- [2] Gutiérrez, M. A., Virginia (2008). "Propuesta de un modelo matemático para la administración óptima de acuíferos". Tesis de grado. Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", La Habana, Cuba.
- [3] Dilla, F. (1993). "Modelación matemática del flujo subterráneo y las técnicas de optimización aplicadas en la investigación y explotación de acuíferos a escala regional" Tesis doctoral, capítulo V. Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", La Habana, Cuba.
- [4] Mesa, H.R. (2004). "Solución del problema inverso en modelos de flujo del agua subterránea mediante un algoritmo de convergencia global". Tesis doctoral, Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", La Habana, Cuba.
- [5] Neelakantan, T.R y Pundarikanthan, N.V. (2000). "Neural Network-Based Simulation-Optimization Model for Reservoir Operation". *Journal of Water Resources Planning and Management*, March / April; 57-64

- [6] Hsiao, C. T y Chang, L. C. (2002). "Dynamic Optimal Groundwater Management with Inclusion of Fixed Costs". *Journal of Water Resources Planning and Management*, January/February; 57-65.
- [7] Martínez, B. J.; Llanusa, H.; Hernández, A.; Dilla, F. (2000). "Manual del usuario del sistema AQÜIMPE". Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", La Habana, Cuba.
- [8] Cabrera, E. (2007). "Simulación de acuíferos con el empleo de herramientas de los Sistemas de Información Geográfica". Tesis de maestría. Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", La Habana, Cuba.
- [9] Martínez, B. J. (1989). "Simulación matemática de cuencas subterráneas: flujo impermanente bidimensional". Monografía. Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", La Habana, Cuba.

Recibido: Julio del 2009
Aprobado: Agosto del 2009