

El problema de los tres tanques: una nueva visión (Parte 1)

Yaset Martínez ValdésE-MAIL: yaset1977@gmail.com

Universidad Tecnológica de La Habana (Cujae), Centro de Investigaciones Hidráulicas (CIH). La Habana, Cuba.

Félix Riaño ValleE-MAIL: riano@tesla.cujae.edu.cu

Universidad Tecnológica de La Habana (Cujae), Centro de Investigaciones Hidráulicas (CIH). La Habana, Cuba.

RESUMEN

El problema de los tres tanques es un problema clásico en la mecánica de los fluidos y su solución ha sido abordada por varias vías. El problema consiste en calcular los gastos y velocidades de circulación en los tres ramales que componen el sistema hidráulico uninodal, así como la cota piezométrica o nivel relativo del nodo con respecto a los niveles de las superficies libres del agua de los otros depósitos. En este artículo, el primero de dos sobre esta línea de investigación, se elabora una metodología de trabajo con enfoque analítico para la solución directa y explícita de este tipo de problema en sus diferentes esquemas de operación. Se brinda un formato de trabajo para una solución general del cálculo de la cota piezométrica en el nodo. Bajo este nuevo enfoque de análisis de estos tipos de sistemas hidráulicos, se plantea el problema de los tres tanques como un caso particular del problema de los n elementos. Se presenta un procedimiento para resolver el problema de la indeterminación del sentido de circulación del depósito o elemento intermedio, componente clave para una correcta definición del caso a resolver. Se expone la metodología de trabajo mediante la resolución de un ejemplo práctico muy presente en los sistemas fuentes por bombeo.

PALABRAS CLAVE: *problema, tres, tanques*

The three-tank problem: a new vision (Part 1)

ABSTRACT

The three-tank problem is a classic problem in fluid mechanics and its solution has been tackled in several ways. The problem consists of calculating the flow rates and velocities in the three branches that make up the one-node hydraulic system, as well as the piezometric level or relative level of the node with respect to the levels of the free surfaces of the water in the other tanks. In this article, the first of two in this line of research, a working methodology with an analytical approach is developed for the direct and explicit solution of this type of problem in its different operating schemes. A working format is provided for a general solution of the calculation of the piezometric level in the node. Under this new approach to the analysis of these types of hydraulic systems, the three-tank problem is presented as a particular case of the n -element problem. A procedure is presented to solve the problem of the indeterminacy of the direction of circulation of the tank or intermediate element, a key component for a correct definition of the case to be solved. The working methodology is presented by means of the resolution of a practical example that is very common in pumped water systems.

KEYWORDS: *problem, three-tanks*

01 INTRODUCCIÓN



2026-06-10– RECIBIDO:

APROBADO: 2026-06-10

Este es un artículo publicado en acceso abierto bajo una licencia [Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Un sistema de tuberías ramificadas está constituido por dos o más tuberías que se ramifican, sucesivamente, sin intersectarse en cierto punto y no vuelven a unirse aguas abajo otra vez para formar circuitos (Giles et al., 2003). Los extremos finales de las ramificaciones pueden terminar en un depósito o descargar libremente a la atmósfera. Un ejemplo de una red abierta se muestra en la figura 1.1. De acuerdo a las cotas piezométricas y la diferencia de niveles de las superficies libres del agua entre los depósitos, así como las características hidráulicas de los conductos, se deberá conocer o suponer la dirección de los caudales de circulación en los distintos tramos o ramales (Sotelo, 1997).

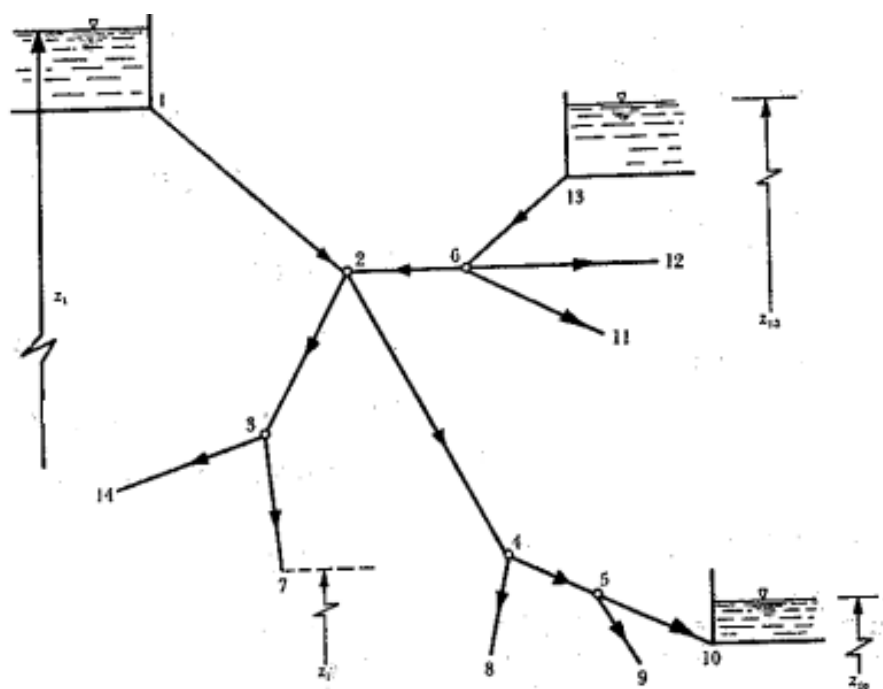


Figure 1.1. Esquema tipológico de una red abierta o ramificada (Sotelo, 1997).

Tomando como ejemplo el esquema de la figura 1.1, de acuerdo con la ecuación de energía aplicada entre el tanque superior y los extremos de descarga en las tuberías, resulta entonces:

$$Z_1 - \left(Z_j + \frac{v_j^2}{2g} \right) = \sum_{i=1}^j h_{ij} \quad (1.1)$$

Donde: Z_1 es la cota piezométrica en el punto 1 (m); Z_j es el nivel de la superficie libre del agua para el caso de una descarga libre en un depósito abierto a la atmósfera, o bien, la cota piezométrica de la línea central de la tubería si se trata de una descarga libre (m); el subíndice j corresponde a las características hidráulicas en el punto j ; v_j es la velocidad de circulación en el punto j en función del tipo de descarga que se realiza (m/s); mientras que el término de la sumatoria de h representa las pérdidas de carga en las tuberías que se encuentran en el recorrido de referencia, desde el punto 1 hasta el punto j (toma signo positivo para h en aquellos elementos en que la dirección del gasto coincide con la dirección del recorrido y negativo en caso contrario) (m). El término h_{ij} representa la suma de las pérdidas locales y de fricción en el tramo que va del nudo i al nudo j . Además, en cada punto de ramificación (nodo) se debe satisfacer la ecuación de Continuidad siguiente (Sotelo, 1997):

$$\sum_{i=1}^j Q = 0 \quad (1.2)$$

Estableciéndose como convención, que los gastos que lleguen al nodo, tengan signo negativo, y positivo los que

salgan de este. Se presentan entonces dos casos de análisis en estos sistemas: diseño y revisión o simulación. En el primer caso, donde se conoce el trazado, geometría y los gastos de circulación de cada tubería, se deberán elegir por lo menos $(l - m)$ diámetros de los l tramos que componen la red, siendo m el número de extremos finales, para evitar la indeterminación del problema, ya que las ecuaciones de nodo se convierten en identidades. Para el segundo caso, se tendrá un sistema de tantas ecuaciones del tipo (1.1) como extremos finales tenga la red; y de tantas ecuaciones del tipo (1.2) como nodos existan. Para la red de la figura 1.1 se pueden establecer ocho ecuaciones del primer tipo y cinco del segundo (Fuertes et al., 2002).

El problema de los tres tanques o depósitos es un sistema simple de tuberías ramificadas con una ramificación única, y consiste en tres depósitos a distintos niveles, unidos por tres conducciones o ramales, que forman un sistema de circulación en Y (esquema clásico), tal y como se muestra en la figura 1.2 en su planteamiento más conocido (Cabrera, 2009).

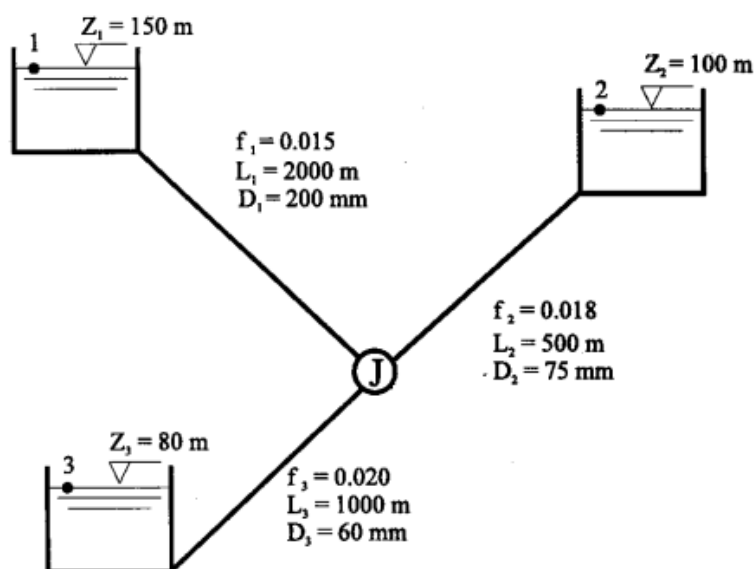


Figure 1.2. Planteamiento clásico del problema de los tres tanques o depósitos en configuración en Y.

Este es un problema clásico en la literatura y su solución ha sido abordada desde distintos enfoques, en su mayoría, por la vía iterativa. El problema se resume en determinar los caudales y velocidades de circulación en los tres ramales, así como la cota piezométrica o nivel relativo del nodo J con respecto a los niveles de las superficies libres del agua de los otros depósitos (véase la figura 1.2).

En este artículo, el primero de dos sobre este tema, se abordará un nuevo enfoque analítico para la solución directa y explícita de este tipo de problema en sus diferentes alternativas de operación. Se presentará una metodología de trabajo para la resolución de cada uno de los casos posibles a presentarse, brindando un formato de trabajo para una solución general. La misma se utilizará para realizar un ejemplo práctico ampliamente abordado en la literatura.

02 DESARROLLO

El problema de los tres tanques es un problema típico dentro del cálculo hidráulico de sistemas de tuberías. Se trata de calcular los caudales circulantes por cada una de las líneas, conocidas las características de las tuberías, las propiedades del fluido y las cotas topográficas o piezométricas de los depósitos. Por simplicidad del cálculo, puesto que el objetivo de este trabajo es presentar el modo de operación ante estos casos, se supondrá que las pérdidas menores estarán incluidas como longitud equivalente.

Para resolver el citado problema se deben satisfacer la ecuación de Bernoulli aplicada entre cada depósito y el nodo J (ver figura 1.2) y la ecuación de Continuidad aplicada en este. Esta última establece que el flujo hacia

el nodo debe ser igual al flujo hacia fuera de este, según se definió en la ecuación (1.2).

La solución se encuentra suponiendo primero una cota piezométrica en el nodo y luego calculando los caudales Q_1 , Q_2 y Q_3 y sustituyéndolos en la ecuación de Continuidad. Si el caudal hacia el nodo es muy grande, se supone una mayor cota piezométrica, lo cual reducirá el caudal afluente e incrementará el caudal de salida, y viceversa. El flujo será desde el depósito o depósitos más elevados hacia el o los tanques de menor cota piezométrica.

Para el caso más sencillo como el de la figura 1.2, según las características de la conducción 2 y el valor de la cota piezométrica del depósito 2 en comparación con la del nodo J , el caudal por la citada línea puede ser de 2 a J o viceversa. Por consiguiente, la ecuación de balance en el nodo podrá adoptar diferentes alternativas; se tendrían dos formulaciones: $Q_1 = Q_2 + Q_3$ o bien $Q_1 + Q_2 = Q_3$.

Por lo tanto, es necesario realizar una hipótesis previa de circulación. Si el sistema es irresoluble para esta hipótesis adoptada, la conclusión es que el sentido de circulación es el inverso al asumido. El sistema así obtenido cuenta con cuatro ecuaciones y otras tantas incógnitas (CP_n , Q_1 , Q_2 y Q_3). La forma de resolver el sistema es mediante un proceso iterativo, puesto que el sistema de ecuaciones propuesto no es lineal. Este método de iteración en el nodo puede ser resuelto por varias técnicas iterativas como las enunciadas anteriormente.

En la revisión de la amplia literatura sobre este tema, se ha podido constatar que el problema clásico, en sus casos más comunes, se aborda desde la perspectiva de tres tanques, y bombas y tanques (menos usual). Para cualquiera de las variantes, la solución iterativa es la que más se ha abordado y, en aislados casos, se ha esbozado una solución analítica que permite resolver los dos casos siguientes (Haestad Methods et al., 2003):

1. Determinación de caudales, conocidas las características de la red y las diferencias de cotas entre los depósitos; trabajando, por lo tanto, con tres ecuaciones con tres incógnitas.
2. Determinación de la diferencia de cotas entre los depósitos, conocidos los caudales y las características de la red; habrá por lo tanto dos ecuaciones con dos incógnitas, ya que las ecuaciones de los caudales son una identidad.

Luego de una profunda revisión crítica sobre los casos más abordados en la literatura, se pueden citar algunas consideraciones: el problema se ha enfocado sobre todo para resolver el esquema de tres tanques, y bombas y tanques (menos usual), siendo el número máximo de elementos considerados 4; se trabaja con valores constantes de los factores de fricción f o C , polinomios reducidos o incompletos de las curvas características de carga-capacidad de las bombas rotodinámicas; se emplea el método de solución gráfico-analítica por la vía iterativa, utilizando en muy contados casos soluciones analíticas bajo ciertas restricciones y comedimientos específicos. Sobre estas propuestas de soluciones analíticas se profundizará en este trabajo.

2.1. Metodología para la solución analítica del problema de los tres tanques

Aunque la propuesta de solución analítica se centrará para el caso de los tres tanques, se abordará el enfoque de solución para un número n de elementos asociados. Por elementos, deberá entenderse, sobre todo, bombas o bomba equivalente (simulación análoga de un acople de m bombas en paralelo) y depósitos. De esta forma, el problema de los tres tanques se considera un caso particular del que pudiera denominarse el problema de los n elementos.

En su concepción más general, el problema de los n elementos tendría un esquema topológico de varios elementos asociados a un único nodo. Aunque se ha tomado como referencia explicativa para la metodología que se presenta el ejemplo de la figura 1.2, estos tipos de sistemas pueden tener diversas variantes topológicas que varían en su complejidad en función del número de elementos. Este modelo que se ilustra es el más sencillo que se puede plantear, pero el procedimiento metodológico general es aplicable para cualquier topología por más compleja que sea.

Para el análisis de las soluciones propuestas para cada caso, el esquema que se tomará como modelo será el de un solo nodo, al cual estarán asociados n elementos. Cuando se suman más elementos al sistema, se dificulta aún más el problema de la indeterminación del sentido de circulación del tanque 2 o intermedio, aumentándose el inconveniente mientras más elementos existan. Para ir esbozando la solución general, se parte del hecho que siempre el depósito —no una bomba o bomba equivalente, ya que para este caso hay que verificarlo— más

elevado inyectará agua al sistema y el de menor cota piezométrica recibirá agua. Estos dos ramales son los únicos con los cuales se conoce *a priori* su sentido de circulación. Del resto, se desconoce su sentido de circulación.

Giles et al. (Giles et al., 2003) proponen una solución para, de cierta forma, resolver este problema para un esquema de tres tanques. Se asume en la primera iteración que la cota piezométrica en el nodo será igual a la cota piezométrica del tanque intermedio. De esta forma, se garantiza que el caudal en ese ramal sea cero, por lo cual se reduce el número de cálculos. Se procede a calcular los caudales desde el tanque superior hacia el nodo, y desde este, hacia el depósito más bajo. De los valores de estos caudales se infiere que la cota piezométrica en el nodo deberá aumentar o disminuir si el caudal hacia el nodo es mayor que el saliente y viceversa, respectivamente.

Giles et al. (Giles et al., 2003) aplican una solución gráfica-analítica particular, diferente a la solución gráfica tradicional (CP vs. ΔQ), pero igual de válida, la cual se muestra en la figura 2.1 junto al esquema habitual (imagen de la izquierda). Esta última está en función de la cota piezométrica en el nodo, mientras que la propuesta por Giles está en función del caudal hacia el nodo, Q_{hacia} . Para ambos casos, el término ΔQ representa el balance de caudales en el nodo.

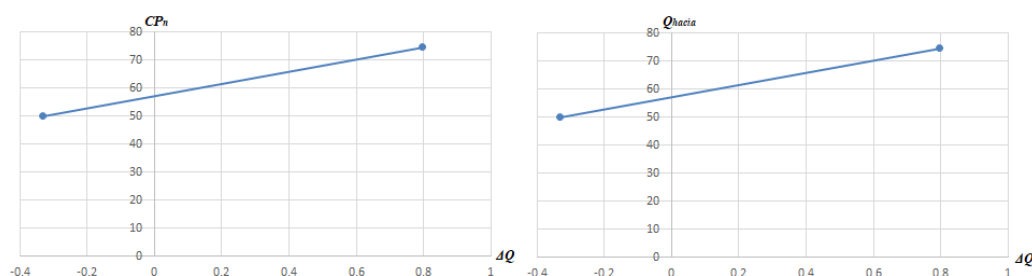


Figure 2.1. Gráficas de solución tradicional en función de la CP_n (izquierda) y la propuesta por Giles (derecha) (Giles et al., 2003).

2.2. Solución del problema de la indeterminación del sentido de circulación del depósito intermedio (elemento intermedio)

Se comenzará primero para el caso de tres elementos. Tomando como ejemplo el esquema de la figura 1.2, se plantea la ecuación de Bernoulli desde el depósito superior (1) hasta el nodo J y de este hacia el tanque receptor inferior (3):

$$Z_1 = CP_J + hf_1 = CP_J + K_1 Q^2 \quad (2.1)$$

$$CP_J = Z_3 + hf_3 = Z_3 + K_3 Q^2 \quad (2.2)$$

Donde: Z_1 y Z_3 son las cotas piezométricas de las superficies libres del agua en los depósitos 1 (superior) y 3 (inferior), respectivamente (m); CP_J es la cota piezométrica en el nodo J (m); hf_1 y hf_3 son las pérdidas de carga en las tuberías 1 y 3, respectivamente (m), y K_1, K_3 son los coeficientes característicos de las conducciones 1 y 3 (m^2/s^5).

Igualando ambas expresiones (2.1) y (2.2) en función de la cota piezométrica en el nodo J , queda:

$$Z_1 = Z_3 + hf_3 + hf_1 \rightarrow Z_1 - Z_3 = \Delta Z_{1-3} = K_3 Q^2 + K_1 Q^2 \rightarrow \Delta Z_{1-3} = Q^2 (K_3 + K_1) \quad (2.3)$$

Donde: ΔZ_{1-3} : diferencia de niveles entre los depósitos 1 y 3, (m).

Despejando el caudal de la expresión (2.3), se obtiene:

$$Q = \sqrt{\frac{\Delta Z_{1-3}}{K_3 + K_1}} \quad (2.4)$$

Con este caudal, el calculado bajo la suposición de que el ramal 2 no existiese, sería el gasto que circula por el

sistema de tuberías en serie T1–J–T3. Luego con este se procede a determinar la cota piezométrica en el nodo J. Este cómputo puede realizarse por la ecuación (2.1) o (2.2). La rasante piezométrica definida para este sistema en serie sería la predominante del sistema general. Esta cota se tomará como referencia para decidir el sentido de circulación en la línea 2, de forma que, si la cota piezométrica en el depósito 2 es mayor a esta, el sentido de circulación será del tanque al nodo y viceversa.

Una vez definido el sentido de circulación en el ramal 2, se puede plantear la ecuación de balance en el nodo de forma correcta para su solución.

Cuando se tratare de varios tanques conectados al nodo, se deberán organizar estos de forma descendente en función de su cota piezométrica, exceptuando el de mayor y menor cota piezométrica del sistema. Es necesario aclarar que esta forma de organización pudiera resultar engañosa, máxime en sistemas que cuenten con varios elementos. Lo recomendable sería organizar la combinación de ramales en función del gasto (ecuación 2.4) de mayor a menor o de forma inversa, si se realizase según el coeficiente característico de la conducción, K , siempre para el caso de la línea que acompaña a la tubería que va hacia el depósito inferior (ej. tubería 3, según el modelo de la figura 1.2).

Luego de determinada la cota piezométrica en el nodo J por el procedimiento anterior, se procederá a comparar esta con la cota piezométrica del depósito 2, CP_2 , determinando su sentido de circulación en función de lo apuntado arriba.

Para el siguiente depósito, CP_3 , deberá calcularse previamente la cota piezométrica en el nodo, con el esquema de solución de los tres tanques (1, 2 y n). Esto es necesario hacerlo ya que deberá calcularse la nueva cota piezométrica en el nodo, la cual será mayor que la previamente determinada. Esta afirmación resulta del principio hidráulico de que, a medida que se sumen elementos que aporten al nodo, el caudal se incrementará a la vez que aumenta la cota piezométrica en este.

Si la nueva cota piezométrica en el nodo, resultado del aporte de los tanques 1 y 2, es inferior a CP_3 , entonces este depósito aportará al nodo, y a la inversa en caso contrario. Este procedimiento se irá repitiendo hasta encontrar el depósito cuya cota piezométrica sea inferior a la nueva calculada en el nodo. A partir de ese reservorio, hasta el tanque inferior, todos recibirán flujo desde el nodo, o sea, serán depósitos receptores.

Un caso particular es aquel sistema donde aparecen como parte de los elementos bombas o bombas equivalentes, trabajando solas contra un depósito o de conjunto con depósitos. Apoyándonos en el esquema de la figura 1.2, y suponiendo que en vez del depósito 1 tuviéramos una bomba, el procedimiento a desarrollar sería el mismo, solo que la ecuación para determinar el gasto del sistema en serie B1–J–T3 sería:

$$Q_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4K_c \Delta Z_{1-3}}}{2K_c} \quad (2.5)$$

Siendo:

$$\Delta Z_{1-3} = Z_3 - Z_{s1} - A \quad (2.6)$$

$$K_C = K_1 + K_3 - C \quad (2.7)$$

Donde:

- Q : caudal impulsado por la bomba o combinación de bombas en paralelo (bomba equivalente), (m^3/s).
- B y C : coeficientes del polinomio representativo de la curva H–Q de una bomba o de la combinación de bombas en paralelo, que están en función de las pérdidas de carga en el interior de la(s) bomba(s), (s/m^2), (s^2/m^5), respectivamente.
- K_C : coeficiente característico equivalente del sistema en serie B1–J–T3, (s^2/m^5).
- ΔZ_{1-3} : diferencia de niveles entre el nivel dinámico del pozo 1 y el depósito 3, (m).
- Z_{s1} : cota piezométrica del nivel dinámico en el pozo de la estación de bombeo 1, (m).
- A : coeficiente del polinomio representativo de la curva H–Q que define el valor de la carga que desarrolla la bomba o bomba equivalente para caudal cero o válvula cerrada, (m).

La ecuación general que modela la curva característica de carga-capacidad de las bombas rotodinámicas de iguales características hidráulicas en su formato general viene representada por (Martínez & Riaño, 2010):

$$H = A \pm \frac{B}{n_b} Q - \frac{C}{n_b^2} Q^2 \quad (2.8)$$

Donde:

- H : carga que desarrolla la(s) bomba(s) equivalente(s), (m).
- n_b : número de bombas trabajando en paralelo (si fuera el caso), adimensional.

Según Martínez (2011), para las bombas rotodinámicas de diseño normalizado con un valor de N_q de 53 a 57, el coeficiente B tiende a cero, por lo cual, para esos casos, se procedería a trabajar con el polinomio incompleto de la forma:

$$H = A - \frac{C}{n_b^2} Q^2 \quad (2.9)$$

2.3. Procedimiento metodológico para el cálculo de la cota piezométrica en el nodo

Para tratar los varios casos que se abordarán desde el punto de vista analítico, es necesario aclarar que todas estas variantes se pueden realizar también por la vía gráfica, con un trabajo más tedioso y menos preciso. El procedimiento propuesto se basa en la determinación directa de la cota piezométrica en el nodo, CP_n , el cual tendrá variaciones en su modelo, en función del número de elementos en el sistema y sus características hidráulicas. La metodología se realizará para los casos con tres elementos, cuatro y un número n de elementos. El procedimiento consta de una subrutina de cálculo intermedio para el cómputo del valor del coeficiente de fricción, f , determinado por la expresión de Swamee–Jain. Se intuye que las pérdidas de carga en las conducciones serán determinadas por la ecuación de Darcy–Weisbach.

$$f = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{N_R^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (2.10)$$

Donde: ε es la rugosidad absoluta de la tubería asociada al material (m); D es el diámetro interior de la tubería (m); y N_R es el número de Reynolds que caracteriza el flujo en la conducción.

$$N_R = \frac{vD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} \quad (2.11)$$

$$h_f = 0,0826 f \frac{L_{eq}}{D^5} Q^2 = K_{WD} Q^2 \quad (2.12)$$

03 SOLUCIÓN GENERAL PARA n ELEMENTOS

La solución de este caso cuando participan varios elementos resulta de aplicar un método iterativo o bien utilizar la vía gráfica para encontrar el valor de CP_n , ya que no cuenta con una solución explícita directa.

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\eta_i - \psi_i CP_n} + \sum_{j=1}^m \left(\omega_j \pm \sqrt{\beta_j - \phi_j CP_n} \right) - \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \sqrt{\psi_k CP_n - \eta_k} = 0 \quad (3.1)$$

Es importante destacar que el segundo término de la ecuación (3.1) refleja la participación de m bombas en el sistema con sus respectivos caudales de bombeo, el cual se consideraría solo en aquellos casos donde hubiera estos equipos. El primer y último término, caracterizan los caudales de los n y $\tilde{n}$ depósitos que aportan y reciben en el sistema, respectivamente. Los distintos coeficientes se calcularían como sigue:

$$\eta_{i,k} = \frac{CP_{T_{i,k}}}{K_{WD_{i,k}}} \quad (3.2) \quad \omega_j = -\frac{B_j}{2(K_j - C_j)} \quad (3.3) \quad \beta_j = \frac{B_j^2}{4(K_j - C_j)^2} + \frac{Z_{sj} + A_j}{K_j - C_j} \quad (3.4)$$

$$\phi_m = \frac{1}{K_j - C_j} \quad (3.5)$$

$$\psi_{i,k} = \frac{1}{K_{WD_{i,k}}} \quad (3.6)$$

Para un número grande de elementos conectados al nodo, la solución iterativa se complejiza aún más. Sin embargo, en la práctica es habitual que a un nodo se conecten a lo sumo cuatro elementos, aprovechando la posibilidad de la instalación de una cruceta o algún accesorio hidráulico similar. El número de elementos y sus características hidráulicas particulares permitirá establecer posibles soluciones directas atendiendo a cada caso. Teniendo en cuenta esto, y trabajando con un máximo de cuatro elementos, la ecuación (2.12) podría operar con hasta cinco términos, dado que el número de estos puede ser igual o una unidad superior a la cantidad de elementos. En este caso, desde el punto de vista técnico no existe ningún problema, sin embargo, desde una visión matemática ocurre un problema de imposibilidad de la obtención de una solución analítica directa de forma explícita. Para estas variantes topológicas se desarrolla el fenómeno de la recurrencia del formato del polinomio irracional, lo cual limita la obtención de soluciones analíticas explícitas solo para los casos con hasta cuatro términos.

Para estas variantes, la solución puede obtenerse solamente por la vía iterativa o bien buscando algún subterfugio para disminuir los términos hasta el máximo de cuatro. Esto último solo se puede hacer si existieran bombas como parte de los elementos. Este tipo de elemento es representado generalmente con dos términos y, de forma excepcional, con uno solo cuando el coeficiente $B = 0$, mientras que los depósitos son simbolizados con un único término. Por ejemplo, en el caso de tres depósitos y una bomba (cuatro elementos), se cuenta de forma general con cinco términos, por lo cual, si se quisiera obtener una solución analítica directa explícita, se debería sustituir el polinomio representativo de la curva característica de carga-capacidad en su forma general (ecuación (2.8)) a un formato incompleto (ecuación (2.9)).

Este proceso de sustitución de polinomios equivalentes se realiza solamente para el dominio de las funciones comprendido en el rango de operación recomendada por el fabricante o, preferiblemente, dentro del rango de fiabilidad de la bomba. En términos prácticos, el dominio de análisis sería el rango de 40

Tomando como referencia el ejemplo del esquema de la figura 1.2, se plantean los siguientes casos, de los cuales, por una cuestión de extensión del trabajo, se obvia el proceso de deducción de las ecuaciones de solución. En este primer artículo se centrará el estudio en el análisis de los casos con tres elementos y tres términos. Las variantes dependen del número de elementos (3) y sus características hidráulicas, así como del régimen de circulación de los caudales del sistema de tuberías. De esta forma, se tienen los siguientes casos:

- Caso 1. Dos depósitos alimentan a un depósito (T1 y T2 abastecen a T3)
- Caso 2. Un depósito suministra agua a dos tanques (T1 abastece a T2 y T3)
- Caso 3. Dos bombas abastecen a un tanque (B1 y B2 alimentan a T1) (caso con $B = 0$)
- Caso 4. Una bomba abastece a dos depósitos (B1 alimenta a T1 y T2) (caso con $B = 0$)
- Caso 5. Una bomba abastece de conjunto con un depósito a un tanque (B1 y T1 brindan servicio a T2) (caso con $B = 0$)

Para todos los casos, la ecuación que modela la simulación hidráulica de estos esquemas de operación para la obtención de la cota piezométrica en el nodo CP_n viene dada por el siguiente polinomio cuadrático:

$$a_1 CP_n^2 + a_2 CP_n + a_3 = 0 \quad (3.7)$$

El cual se resuelve por la expresión (Teorema de Cardano-Vieta):

$$CP_n = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}}{2a_1} \quad (3.8)$$

Caso 1

$$a_1 = 4\alpha_3 - \alpha_2^2 \quad (3.9) \quad a_2 = 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_4 \quad (3.10) \quad a_3 = 4\alpha_5 - \alpha_1^2 \quad (3.11) \quad \alpha_1 = \sum_{i=1}^3 \eta_i \quad (3.12)$$

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^3 \psi_i \quad (3.13) \quad \alpha_3 = \psi_1\psi_2 \quad (3.14) \quad \alpha_4 = \eta_1\psi_2 + \eta_2\psi_1 \quad (3.15) \quad \alpha_5 = \eta_1\eta_2 \quad (3.16)$$

Caso 2

Los coeficientes $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2$ coinciden con el Caso 1:

$$\alpha_3 = \psi_2\psi_3 \quad (3.17) \quad \alpha_4 = \eta_3\psi_2 + \eta_2\psi_3 \quad (3.18) \quad \alpha_5 = \eta_2\eta_3 \quad (3.19)$$

Caso 3

$$a_1 = \alpha_2^2 - 4\alpha_3 \quad (3.20) \quad a_2 = 2\alpha_2\alpha_1 + 4\alpha_4 \quad (3.21) \quad a_3 = \alpha_1^2 - 4\alpha_5 \quad (3.22) \quad \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 - \eta_1 \quad (3.23)$$

$$\alpha_2 = \psi_1 - \phi_1 - \phi_2 \quad (3.24) \quad \alpha_3 = \phi_1\phi_2 \quad (3.25) \quad \alpha_4 = \phi_1\beta_2 + \phi_2\beta_1 \quad (3.26) \quad \alpha_5 = \beta_1\beta_2 \quad (3.27)$$

Caso 4

Los coeficientes a_1, a_2 y a_3 coinciden con el Caso 3, según las ecuaciones (3.20), (3.21) y (3.22).

$$\alpha_1 = \eta_1 + \eta_2 - \beta_1\psi_2 \quad (3.28) \quad \alpha_2 = \phi_1 - \psi_1 - \psi_2 \quad (3.29)$$

$$\alpha_3 = \psi_1\psi_2 \quad (3.30) \quad \alpha_4 = \psi_1\eta_2 + \psi_2\eta_1 \quad (3.31) \quad \alpha_5 = \eta_1\eta_2 \quad (3.32)$$

Caso 5

$$a_1 = \alpha_2^2 + 4\alpha_3 \quad (3.33) \quad a_3 = \alpha_1^2 + 4\alpha_5 \quad (3.34) \quad \alpha_1 = \beta_1 - \eta_1 - \eta_2 \quad (3.35)$$

El coeficiente a_2 coincide con el definido para el Caso 1 y se obtiene mediante la ecuación (3.10).

$$\alpha_2 = \psi_1 + \psi_2 - \phi_1 \quad (3.36) \quad \alpha_3 = \psi_1\phi_1 \quad (3.37) \quad \alpha_4 = \eta_1\phi_1 + \beta_1\psi_1 \quad (3.38) \quad \alpha_5 = \beta_1\eta_1 \quad (3.39)$$

A continuación, se desarrolla un ejemplo práctico donde se expone la metodología de trabajo en uno de los casos analizados.

3.1. Aplicación de la metodología de trabajo como procedimiento de simulación hidráulica para un sistema fuente por bombeo.

Como información del sistema fuente por bombeo se conoce que el servicio de abasto será continuo durante las 24 horas con un caudal constante. En la Tabla 3.1 se brinda información sobre las características hidráulicas del sistema fuente por bombeo. Para ilustrar el esquema del sistema hidráulico, se utilizará como referencia la Figura 1.2, donde se sustituye el depósito 2 por una bomba rotodinámica (B1).

La cota piezométrica del nivel del agua en el tanque de regulación es $Z_t = 7,000$ m (cota de descarga de la tubería en el depósito). Se emplearán tuberías de polietileno de alta densidad (PEAD). La rugosidad absoluta del material PEAD es de $2,5 \times 10^{-6}$ m. La presión nominal de diseño de dichas tuberías será de 5 atm (PN 5). Se ha tomado como valor indicativo para el diseño y la operación del sistema un rango de velocidad recomendable de 1–1,8 m/s (Instituto Nacional de Recursos Hidráulicos (INRH), 2006). Asimismo, se considera un valor de viscosidad cinemática de 10^{-6} m²/s.

El polinomio representativo de la curva característica de carga-capacidad de la bomba, ajustado a una ecuación de segundo grado según la expresión (2.8), viene dado por (con Q en m³/s y H en m):

Bomba 1:

$$H_{B1} = 15,12083 - 1,14146 Q - 47,77357 Q^2 \quad (3.40)$$

El esquema topológico nos puede indicar que pueden corresponder a los casos 4 o 5. Para cualquiera de estos casos, se analiza la variante de tres elementos con tres términos, por lo cual se hace necesario sustituir el polinomio representativo de la curva característica de carga-capacidad, por una forma análoga con la restricción de que $B = 0$.

Antes de proceder en este sentido, se debe resolver primero el problema de indeterminación del sentido de

Table 3.1. Información de las características hidráulicas del sistema fuente por bombeo

Longitud de tuberías (m)		Cotas y niveles dinámicos (m)	
Conductora principal CP (Línea 3)	3000,00	Nodo, Z_n	5,000
Conductora secundaria 1 CS1 (Línea 1)	1500,00	Pozo 1, Z_{S1}	7,000
Conductora secundaria 2 CS2 (Línea 2)	1000,00	Depósito 1, Z_{T1}	15,000
Diámetros de las tuberías del sistema hidráulico (m)			
D_{CS1}	D_{CS2}	D_{CP}	
$D_{int} = 0,5908$ ($D_{ext} = 630$ mm)	$D_{int} = 0,5252$ ($D_{ext} = 560$ mm)	$D_{int} = 0,9378$ ($D_{ext} = 1000$ mm)	

circulación en las líneas 1 y 2, con lo cual quedaría determinado cuál caso se está abordando, el 4 o el 5. Con este proceder, se podrá determinar si la bomba 1 aporta caudal al nodo, si abastece a ambos depósitos o si ambos elementos aportan al tanque 2.

En este sentido, la solución de la incógnita del sentido de circulación se puede analizar tanto por el sistema en serie (B1–J–T2) como por la vía del depósito superior (T1–J–T2). La Figura 1.2 representa el esquema hidráulico de referencia.

Primeramente, se calculan los caudales para ambas alternativas a través de las ecuaciones (2.4)–(2.7). Los resultados se muestran en la Tabla 3.2.

Table 3.2. Resultados del análisis hidráulico de los sistemas en serie (B1–J–T2) y (T1–J–T2)

Sistema B1–J–T2		Sistema T1–J–T2	
Gasto de circulación Q_{2-3} (m ³ /s)	0,438228	Gasto de circulación Q_{1-3} (m ³ /s)	0,582291
Coefficiente de fricción f_2	0,011613	Coefficiente de fricción f_1	0,011298
Coefficiente de fricción f_3	0,012741	Coefficiente de fricción f_3	0,012138
Velocidad v_2 (m/s)	2,023	Velocidad v_1 (m/s)	2,124
Velocidad v_3 (m/s)	0,634	Velocidad v_3 (m/s)	0,843
Cota piezométrica CP_n (m)	7,836	Cota piezométrica CP_n (m)	8,406

Debido a que el gasto de circulación mayor corresponde al sistema en serie por la vía (T1–J–T2), esta define la rasante piezométrica predominante. Por tanto, se adopta la mayor cota piezométrica.

Se verifica la contribución de la bomba al nodo mediante la condición:

$$Z_{S1} + A_1 > CP_n$$

resultando:

$$7,000 + 15,121 = 22,121 \text{ m} > 8,406 \text{ m}$$

por lo cual se confirma que la bomba aporta al nodo y se trata del Caso 5.

Antes de iniciar el procedimiento de cálculo de la cota piezométrica en el nodo, se hace necesario obtener un polinomio sustitutivo de la ecuación 3.40 con la restricción $B = 0$, satisfaciendo el requisito de tres elementos y tres términos. Para ello se trabaja en el intervalo de caudal $0,4Q_d$ a $1,4Q_d$ mediante el método de mínimos cuadrados. Los resultados se muestran en la Tabla 3.3.

Resolviendo la ecuación 3.8, se obtienen los valores tras un proceso iterativo para la determinación de los coeficientes de fricción de cada tubería (iniciando con $f = 0,02$):

$$CP_n = 10,099 \text{ m}; \quad f_1 = 0,011589796; \quad f_2 = 0,011783862; \quad f_3 = 0,011309861; \quad (3.41)$$

Table 3.3. Datos característicos de la curva carga-capacidad y su equivalente reducida H_{e1}

Q (m ³ /s)	Q_a (%)	H_{B1} (m)	H_{e1} (m)	Error (%)
0.000	0	15,121	–	–
0.060	20	14,880	–	–
0.120	40	14,296	14,280	0,111
0.180	60	13,367	13,380	0,093
0.240	80	12,095	12,120	0,206
0.300	100	10,479	10,500	0,203
0.360	120	8,518	8,520	0,018
0.420	140	6,214	6,180	0,550
0.480	160	3,566	–	–
Error medio del intervalo (%)				0,197

$$Q_1 = 0,495615 \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_2 = 0,400053 \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_3 = 0,895668 \text{ m}^3/\text{s}; \quad (3.42)$$

$$v_1 = 1,808 \text{ m/s}; \quad v_2 = 1,847 \text{ m/s}; \quad v_3 = 1,297 \text{ m/s}. \quad (3.43)$$

Si se utiliza la vía iterativa resolviendo la ecuación 3.1, empleando la curva completa o su aproximación, mediante SOLVER de Excel se obtiene:

$$CP_n = 10,101 \text{ m}; \quad f_1 = 0,011590109; \quad f_2 = 0,011782295; \quad f_3 = 0,011309367; \quad (3.44)$$

$$Q_1 = 0,495530 \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_2 = 0,400383 \text{ m}^3/\text{s}; \quad Q_3 = 0,895912 \text{ m}^3/\text{s}; \quad (3.45)$$

$$v_1 = 1,807 \text{ m/s}; \quad v_2 = 1,848 \text{ m/s}; \quad v_3 = 1,297 \text{ m/s}. \quad (3.46)$$

El error relativo en la cota piezométrica es de 0,015%. Comparando ambos métodos, se observa que el procedimiento propuesto reduce aproximadamente a la mitad el tiempo de cómputo respecto a la herramienta SOLVER de Microsoft Excel.

04 CONCLUSIONES

La simulación hidráulica de sistemas de tuberías ramificadas constituye una herramienta fundamental para la adecuada gestión y operación de este tipo de infraestructuras. Un caso ampliamente conocido dentro de esta clase de sistemas es el denominado problema de los tres tanques, el cual corresponde a un esquema de operación asociado a sistemas mononodales. Sin embargo, no se ha encontrado en la literatura especializada una propuesta de solución analítica directa para este tipo de configuraciones ramificadas, a pesar de su presencia frecuente en obras hidráulicas de abastecimiento de agua.

Este artículo, primero de una serie de dos trabajos dedicados a esta temática, se ha centrado en la formulación de una metodología para el cálculo directo y explícito de la cota piezométrica en el nodo de sistemas hidráulicos uninodales. Se han analizado diversas variantes de resolución reportadas en la literatura, desde métodos iterativos (incluyendo enfoques gráfico-analíticos, los más habituales) hasta formulaciones analíticas en función del caudal, demostrándose que el método propuesto constituye una alternativa más rápida y eficiente.

Como parte de la metodología desarrollada, se propone un procedimiento para resolver una de las principales dificultades presentes en cualquiera de los enfoques existentes: la indeterminación del sentido de circulación en el elemento intermedio del sistema. Este procedimiento se fundamenta en una nomenclatura generalizada de los elementos hidráulicos del sistema. Desde una reinterpretación del enfoque de análisis de estos sistemas, se

plantea además que el problema de los tres tanques puede considerarse como un caso particular del problema general de n elementos interconectados. Finalmente, se desarrolla un ejemplo práctico que permite ilustrar la aplicación de la metodología propuesta.

05 REFERENCIAS

- Cabrera, E.** (2009). *Ingeniería hidráulica aplicada a los sistemas de distribución de agua* (3ra, Vol. t. 1 y 2). Editorial Unidad Docente Mecánica de Fluidos, Universidad Politécnica de Valencia.
- Fuertes, V. S., et al.** (2002). *Modelación y diseño de redes de abastecimiento de agua* (1ra). Editorial Grupo de Mecánica de los Fluidos, Universidad Politécnica de Valencia.
- Giles, R. V., Evett, J. B., & Cheng, L.** (2003). *Mecánica de los fluidos e hidráulica* (3ra). Editorial McGraw-Hill.
- Haestad Methods et al.** (2003). *Advanced water distribution modeling and management* (First). Editorial Haestad Press.
- Instituto Nacional de Recursos Hidráulicos (INRH).** (2006). *Instructivo para la utilización de tuberías y accesorios de pead.* La Habana, Cuba.
- Martínez, Y.** (2011). *Metodología para el diseño hidráulico de las estaciones de bombeo para acueducto* [Doctoral dissertation, Instituto Superior Politécnico “José Antonio Echeverría” (Cujae)].
- Martínez, Y., & Riaño, F.** (2010). Características peculiares de la operación de bombas rotodinámicas en paralelo [Universidad Agraria de La Habana Fructuoso Rodríguez (UNAH), Mayabeque, Cuba]. *Ciencias Técnicas Agropecuarias*, 19(2), 38–43.
- Sotelo, G.** (1997). *Hidráulica general* (Vol. Vol. 1). Editorial Limusa.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existen conflicto de interés de alguna naturaleza.

ORCID de los autores

Yaset Martínez Valdés <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>

Félix Riaño Valle <https://orcid.org/0000-0003-0000-0000>