

# Ecuaciones analíticas para pérdidas de energía en bifurcaciones comunes en conductos hidráulicos con circulación forzada

## INTRODUCCIÓN

Durante siglos la humanidad consideró sobradas las fuentes de agua dulce para las necesidades existentes y ello condujo a no cuidar su utilización, sin pensar si perjudicaría o no más adelante. Desde fines del siglo XIX y principios del XX con base al gran desarrollo logrado durante la era Industrial, el consumo y los diversos usos del agua iniciaron etapas de escasez y contaminación en algunos lugares de nuestro planeta, obligando a prever y ordenar su uso para una optimización del recurso hidráulico mediante la construcción de grandes obras hidráulicas. Un tipo de estas obras determinantes para el bienestar y desarrollo de la humanidad, son las presas para embalsar y/o desviar cursos de agua, haciendo su posterior aprovechamiento o protección de zonas, incluyendo las conducciones y entrega del agua a usar.

En etapas posteriores a la construcción de presas, cuando en algunas regiones se excedió la utilización de recursos naturales hasta cerca de 90%, fue necesario ponderar aún más la regulación de usos del agua y coordinarlos con los recursos disponibles, porque se llegó al límite de posibilidades. En este periodo designado súperalmacenamiento ó aprovechamiento integral conjunto (Balairón, 2002), se reforman las obras hidráulicas y cuidados operativos en el uso del agua. Además, como algunas cuencas hidrológicas llegan al límite del recurso, se recapacita sobre el problema hidráulico no sólo por cuencas, sino por totales en la región, dando lugar al trasvase de unas cuencas a otras para equilibrarlas; también se intenta ampliar los recursos naturales desalando agua del mar, previendo el momento en que el consumo supere el 100% del agua dulce natural; finalmente, en esta etapa también se reutiliza el agua después de someterla a tratamientos de saneamiento.

En su mayoría, los países en vías de desarrollo continúan la etapa de construcción de obras hidráulicas para

## Resumen / Abstract

*Se obtienen ecuaciones analíticas que permiten determinar, con rapidez y precisión, las pérdidas de energía en este tipo de obra hidráulica. Existen diversas publicaciones que arrojan información valiosa sobre el tema y seleccionando entre ellas algunos trabajos que contienen tablas y gráficos con valores de coeficientes confiables, éstos son revisados, analizados y tratados matemáticamente para su actualización y uso. El principio básico del presente trabajo consiste en obtener expresiones matemáticas que representen fielmente los valores numéricos contenidos en las tablas y gráficos de origen. Las ecuaciones obtenidas fueron validadas por los autores del presente artículo y por su confiabilidad, se recomienda integrarlas a un programa de computación que permita el procesamiento de datos en forma rápida y segura, para el diseño de estas obras hidráulicas.*

*Palabras clave: bifurcaciones, conductos hidráulicos, pérdidas de energía, ecuaciones analíticas.*

*Analytic equations are presented to make fast and accurate calculations of energy loss in this type of hydraulic works. Various publications give valuable information on the subject and after selecting several ones containing tables and graphs with reliable coefficient values, the values are reviewed, analyzed and treated mathematically for their update and use. The main purpose of this work is to obtain mathematical expressions faithfully representing the numerical values contained in the original tables and graphs. Every proposed equation has been carefully validated by the authors and due to their trustability, they are recommended to be integrated into a computer program for fast and safe data processing in the design of these hydraulic works.*

*Keywords: bifurcation, hydraulic conduit, energy loss, analytic equations.*

José G. Morales-Nava, e-mail: jnava98@yahoo.com  
 Pablo A. Rousseau-Figueroa, e-mail: pablorousseau@uabc.mx  
 José R. Campos-Gaytán, e-mail: esoj\_nebur@hotmail.com

Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ingeniería Ensenada, Ensenada, BC, México.

aprovechar sus recursos naturales, mientras los países desarrollados están optimizando sus recursos mediante modificaciones a sus leyes y obras. Por tal motivo además de las represas, otras obras hidráulicas de importancia son las conducciones hidráulicas con régimen de circulación forzada.

Entre los elementos de una presa se tienen las obras de toma, conjunto de estructuras que permiten el control y regulación de las extracciones de agua en forma eficiente, satisfaciendo necesidades de cantidad, calidad y características para los diversos usos. Parte importante de la obra de toma son los conductos que transportan el agua desde la bocatoma (aguas arriba de la cortina), hasta la zona de disposición y pueden tener régimen de circulación libre, forzada o mixta por tramos, además de ser un solo conducto o ramificarse para su disposición; el caso de estudio es referido a la *conducción con régimen de circulación forzada y la bifurcación de los mismos*. Respecto al tema existen diversas publicaciones que aportan conocimientos valiosos, siendo seleccionados algunos de ellos y como aporte del presente documento, después de ser analizados y tratados matemáticamente para su actualización, son presentados aquí para un uso eficiente, seguro y exacto, que permite ahorros en el proceso de diseño o revisión de este tipo de obras.

## MATERIALES Y MÉTODOS

En las conducciones con régimen de circulación forzada, los cambios de dirección del flujo originadas por las ramificaciones producen pérdidas de energía (CFE, 1983), (Sotelo, 2003), ya que los filetes líquidos al tratar de continuar una trayectoria rectilínea (debido a su propia inercia), modifican su distribución de velocidades provocando separación por el lado interior y aumento de presión en el lado exterior, induciendo un movimiento espiral hacia aguas abajo desde el cambio de dirección, y que debido al rozamiento causa pérdidas en la energía disponible que lleva el flujo. Por tanto resulta primordial lograr la menor pérdida de energía hidráulica en los sistemas, principalmente donde es de gran importancia la conservación de la misma como sucede donde se tiene que añadir energía mecánica (sistemas de bombeo), ó en donde se aprovecha la energía hidráulica para transformarla a otro tipo de energía (sistemas de producción hidroeléctrica). Las pérdidas de energía en bifurcaciones se deben al ángulo que forman la tubería principal con sus ramificaciones, la relación de dimensiones en la sección transversal de los conductos y la dirección del flujo en los mismos.

Adquiere importancia el presente trabajo porque al expresar mediante fórmulas matemáticas los valores contenidos en gráficos y tablas de consulta existentes en manuales y libros de consulta, es factible determinar rápidamente el ángulo y tipo de bifurcación más conveniente para cada proyecto, permitiendo el cambio de dirección de los filetes hidráulicos en forma suave, con la menor

alteración del flujo dentro de los conductos, disminuyendo las pérdidas de energía y finalmente proporcionando mayor eficiencia al diseño o revisión.

En la bibliografía consultada, existe coincidencia en cuanto a que dichas pérdidas son debidas principalmente al rozamiento y están en función del ángulo entre el conducto principal y sus ramificaciones, así como del diámetro o dimensiones de los conductos y la relación entre el caudal principal y el de las bifurcaciones; también es coincidente en que al tratarse de las denominadas "pérdidas menores" ó "pérdidas locales", ellas se determinan mediante la expresión general siguiente:

$$h = K \frac{v^2}{2g} \quad (1)$$

Donde  $h$  es la pérdida de energía (m);  $K$  es un coeficiente dependiente del tipo de pérdida que se trate (adimensional);  $V^2/2g$  es la carga de velocidad (m), para la cual  $V$  es la velocidad del flujo (m/s) antes o después de la alteración (como especifique el análisis) y  $g$  es aceleración de la gravedad (m/s<sup>2</sup>).

Por tratarse de una pérdida menor debido a la bifurcación, el coeficiente de pérdidas es denominado  $K_B$ , la velocidad del flujo  $V$  debe considerarse aguas arriba de la ramificación y la ecuación (1) toma la siguiente forma:

$$h = K_B \frac{v^2}{2g} \quad (2)$$

Estas pérdidas de energía han sido posible cuantificarlas mediante pruebas experimentales de laboratorio (CFE, 1983), existiendo tablas y gráficos elaborados por diversos investigadores para diferentes condiciones y entre la gran variedad de condiciones existentes para bifurcación de conductos forzados, fueron identificados y analizados los casos siguientes:

1. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 45^\circ$  determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$ .
2. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 60^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$ .
3. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$ .
4. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 120^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$ .
5. Bifurcaciones canto afilado con ángulos comprendidos entre  $\theta = 45^\circ$  y  $90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-32}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$ .
6. Bifurcaciones canto redondeado de radio  $r = 0.1 D_1$ ,

con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$ .

7. Bifurcaciones con reducción en el ramal secundario y ángulo  $\theta = 45^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 + A_2 = A_3$ .

8. Bifurcaciones en Y simétricas con ángulo  $\theta = variable$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 + A_2 = A_3$ .

9. Bifurcaciones en Y simétricas con ángulo  $\theta = variable$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 = A_2 = A_3$ .

10. Bifurcaciones para conductos cuadrados, canto afilado, con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 = A_2 = A_3$ .

11. Bifurcaciones para conductos cuadrados, canto afilado, con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-23}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 = A_2 = A_3$ .

A continuación se presenta el análisis y propuesta para cada uno de los casos indicados.

**ECUACIONES**

1. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 45^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$

En este caso el conducto principal tiene una área  $A_3$ , el ramal que se deriva a  $45^\circ$  tiene una área  $A_1$  diferente al principal y la continuación del conducto principal es de una área  $A_2 = A_3$ ; el coeficiente de pérdidas  $K_{B-31}$  se obtiene en base a la relación de áreas  $A_1/A_3$  y la relación de caudales  $Q_1/Q_3$ , tal como se muestra en la gráfica original de la Fig. 1.

Del gráfico de la Fig. 1 se obtuvieron pares de valores usando como abscisas la relación  $A_1/A_3$  y como ordenadas los valores del coeficiente  $K_{31}$  correspondientes a las curvas graficadas, con lo cual se obtuvo a su vez, una curva representativa de todos valores, cuya ecuación analítica obtenida mediante uno de los métodos de ajuste de curvas, se muestra a continuación:

$$K_{B-31} = a + b \left(\frac{A_1}{A_3}\right) \left(\ln\left(\frac{A_1}{A_3}\right)\right) + \frac{c \left(\ln\left(\frac{A_1}{A_3}\right)\right)}{\left(\frac{A_1}{A_3}\right)} + \frac{d}{\left(\frac{A_1}{A_3}\right)^{1.5}} \tag{3}$$

Por tenerse dos variables al mismo tiempo como son la relación de áreas  $A_1/A_3$  y la relación de caudales  $Q_1/Q_3$ , fue necesario obtener una ecuación particular para cada constante ( $a, b, c, d$ ) de la ecuación (3) y así representar la variación de valores en función de los caudales; considerando lo anterior, la ecuación final para todo el conjunto de valores del gráfico analizado, queda representada por la composición de la ecuación (3), substituyendo en ella a su vez, las ecuaciones que dan valores a las constantes ( $a, b, c, d$ ) mediante las expresiones siguientes:

$$a = \left[ -3019.4347 + \left( 3085.8171 \left(\frac{Q_1}{Q_3}\right)^2 \right) + \left( -2023.5525 \left(\frac{Q_1}{Q_3}\right)^2 \ln\left(\frac{Q_1}{Q_3}\right) \right) + \left( -3845.4463 \left(\frac{Q_1}{Q_3}\right)^{0.5} \ln\left(\frac{Q_1}{Q_3}\right) \right) \right] \tag{3a}$$

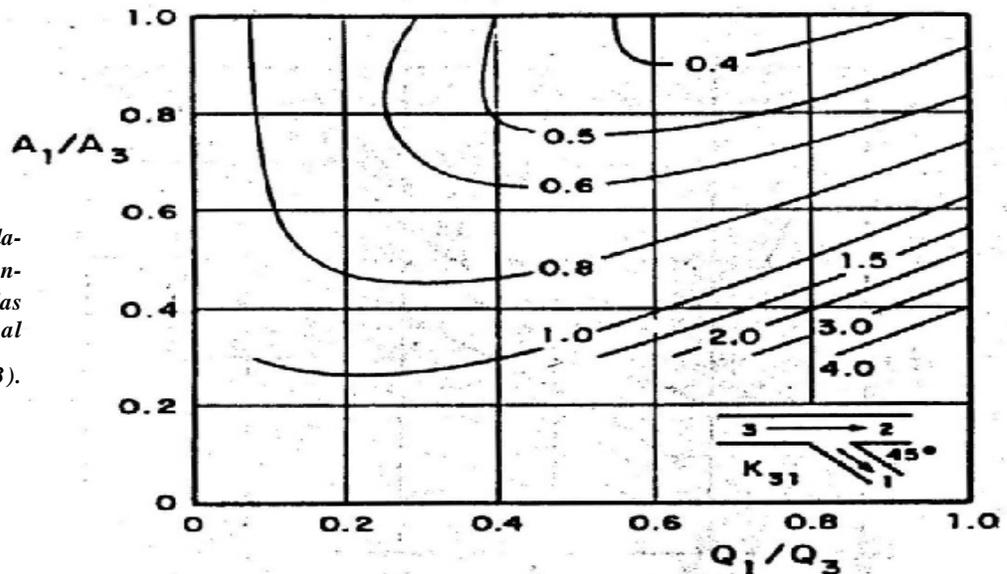


Figura 1. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 45^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$  (CFE, 1983).

$$b = \left[ 829.8491 + \left( -847.4222 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 \right) + \left( 557.5949 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 \ln \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) \right) + \left( 1056.3633 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^{0.5} \ln \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) \right) \right] \quad (3b)$$

$$c = \left[ 3790.0508 + \left( -3873.7923 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 \right) + \left( 2541.3512 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 \ln \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) \right) + \left( 4825.6876 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^{0.5} \ln \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) \right) \right] \quad (3c)$$

$$d = \left[ 3025.2751 + \left( -3091.2201 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 \right) + \left( 2028.8409 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 \ln \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) \right) + \left( 3851.855 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^{0.5} \ln \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) \right) \right] \quad (3d)$$

2. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 60^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$ .

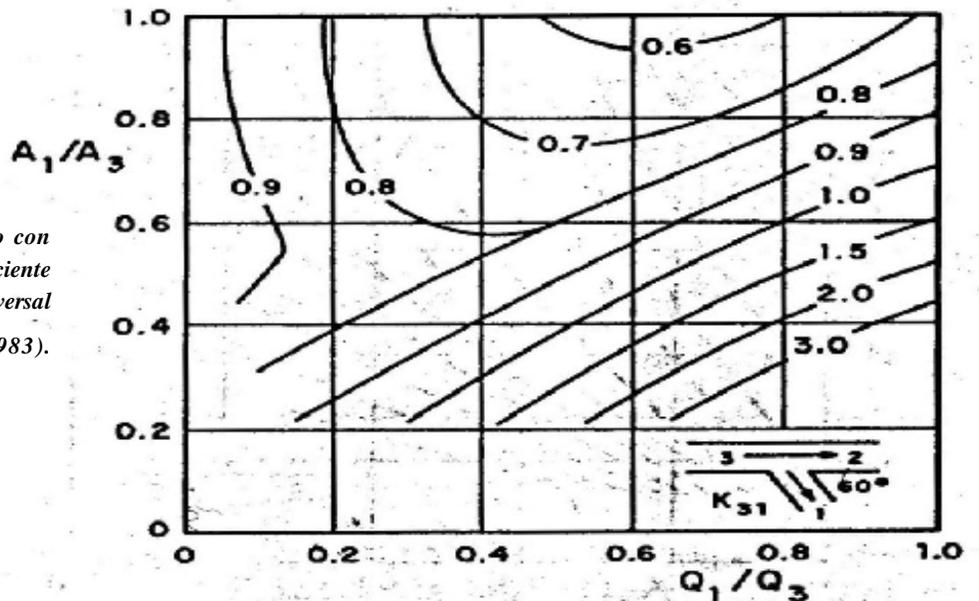
Al igual que en el caso 1, el gráfico original se muestra en la Fig. 2 y posteriormente las ecuaciones que lo representan, las cuales se obtuvieron en la forma ya descrita del caso anterior. De aquí en adelante y con fines de ahorrar espacio por la limitación del mismo, se presentará únicamente el gráfico original y las ecuaciones que lo simbolizan. Así se tiene para el caso presente:

La ecuación (4) mostrada a continuación, es la base y sus complementarias que se muestran después de ésta, son las (4a), (4b), (4c) y (4d).

$$K_{B-31} = a + b \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) \ln \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) + c \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^3 + d \ln \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) \quad (4)$$

$$a = \left[ 52.0899 + \left( 154.0175 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \left( -70.9158 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{2.5} \right) + \left( 18.7465 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{0.5} \right) \right] \quad (4a)$$

Figura 2. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 60^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$  (CFE, 1983).



$$b = \left[ 113.6083 + \left( 463.7903 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2 \right) + \left( -333.7437 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{2.5} \right) + \left( -244.6478 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{0.5} \right) \right] \quad (4b)$$

$$c = \left[ 62.3027 + \left( -204.1324 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{1.5} \right) + \left( 142.6333 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2 \right) + \left( 33.0728 \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) \right] \quad (4c)$$

$$d = \left[ 16.2852 + \left( 39.9021 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{1.5} \right) + \left( -17.3544 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{2.5} \right) + \left( -39.1721 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{0.5} \right) \right] \quad (4d)$$

3. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$ .

En la Fig. 3 se muestra el gráfico original.

La ecuación (5) es la base con sus complementarias (5a), (5b), (5c), (5d) y (5e), que se muestran a continuación:

$$K_{B-31} = \frac{1}{\left[ a + b \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) + c \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 + d \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^3 + e \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^4 \right]} \quad (5)$$

$$a = \left[ 5.6716 + \left( -4.66 \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \left( \frac{-0.7164}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) + \left( -10.6238 \text{Exp}^{-\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) \right] \quad (5a)$$

$$b = \left[ -28.0484 + \left( 13.945 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \left( \frac{28.5228}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{0.5}} \right) + \left( \frac{4.7175 \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right)}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) \right] \quad (5b)$$

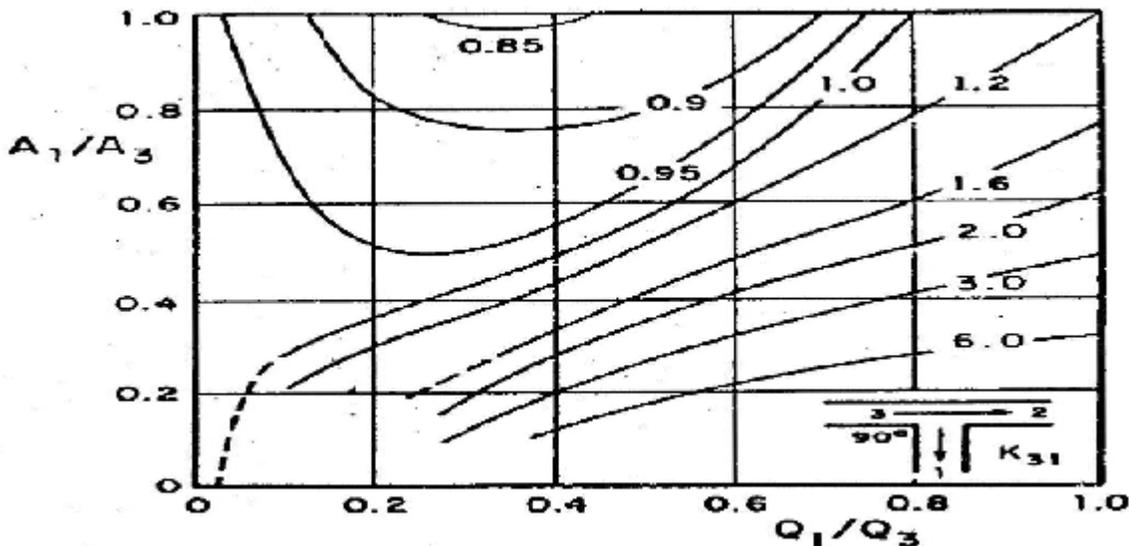


Figura 3. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$  (CFE, 1983).

$$c = \left[ 21.01 + \left( -39.253 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \left( \frac{-27.0745}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{1.5}} \right) + \left( \frac{16.5636}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2} \right) \right] \quad (5c)$$

$$d = \left[ 537.2792 + \left( 535.8057 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \left( -196.289 \operatorname{Exp} \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \left( \frac{-6.2508}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2} \right) \right] \quad (5d)$$

$$e = \left[ -30.8709 + \left( \frac{76.4466}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) + \left( \frac{-19.6994 \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right)}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2} \right) + \left( \frac{-44.2206}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2} \right) \right] \quad (5e)$$

**NOTA:** La ecuación resultante tiene validez en la relación  $Q_1/Q_3$ , para todos los intervalos de valores desde 0 hasta 1.0; pero la relación  $A_1/A_3$ , únicamente tiene validez en los intervalos de valores de 0.3 hasta 1.0.

4. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 120^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$ .

En la Fig. 4 se muestra el gráfico original.

La ecuación (6) es la base con sus complementarias (6a), (6b), (6c), (6d) y (6e), que se muestran a continuación:

$$K_{B-31} = a + b \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) + c \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 + d \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^3 + e \operatorname{Exp} \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) \quad (6)$$

$$a = \left[ 3534.8057 + \left( -1092.9502 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{2.5} \right) + \left( 3265.9565 \left( \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right)^2 \right) + \left( \frac{-2456.2752}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) \right] \quad (6a)$$

$$b = \left[ 3571.9646 + \left( -1104.6011 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{2.5} \right) + \left( 3301.7843 \left( \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right)^2 \right) + \left( \frac{-2482.8422}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) \right] \quad (6b)$$

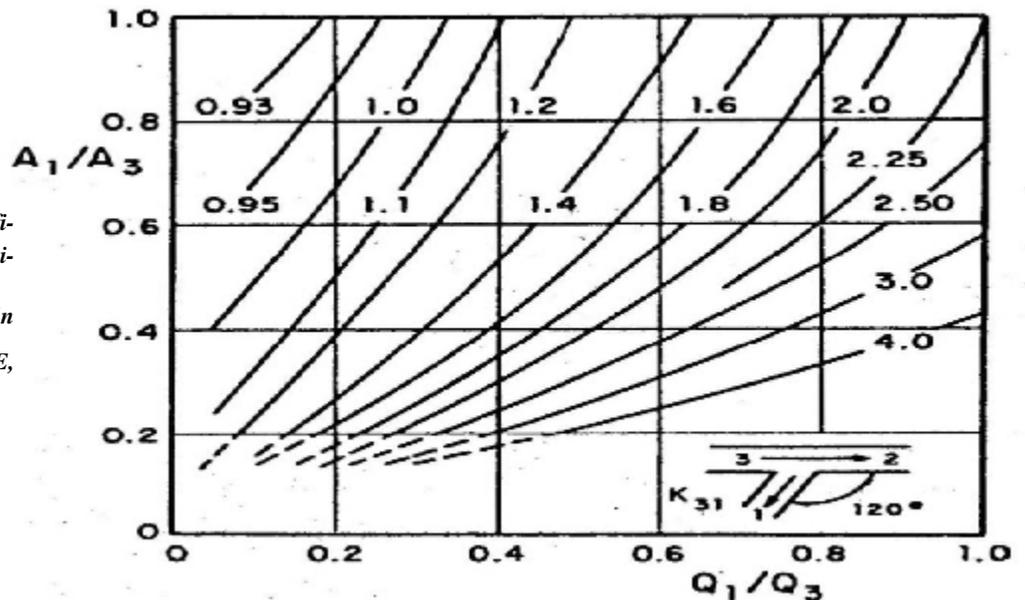


Figura 4. Bifurcaciones canto afilado con ángulo  $\theta = 120^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$  (CFE, 1983).

$$c = \left[ 1486.6249 + \left( -459.9771 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{2.5} \right) + \left( 1374.5018 \left( \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right)^2 \right) + \left( \frac{-1021.9771}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) \right] \quad (6c)$$

$$d = \left[ 1038.3108 + \left( -320.6149 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{2.5} \right) + \left( 958.6892 \left( \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right)^2 \right) + \left( \frac{-721.8622}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) \right] \quad (6d)$$

$$e = \left[ -3533.9308 + \left( 1092.9166 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{2.5} \right) + \left( -3265.9742 \left( \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right)^2 \right) + \left( \frac{2456.3243}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) \right] \quad (6e)$$

5. Bifurcaciones canto afilado con ángulos comprendidos entre  $\theta = 45^\circ$  y  $90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-32}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$ .

En la Fig. 5 se muestra el gráfico original.

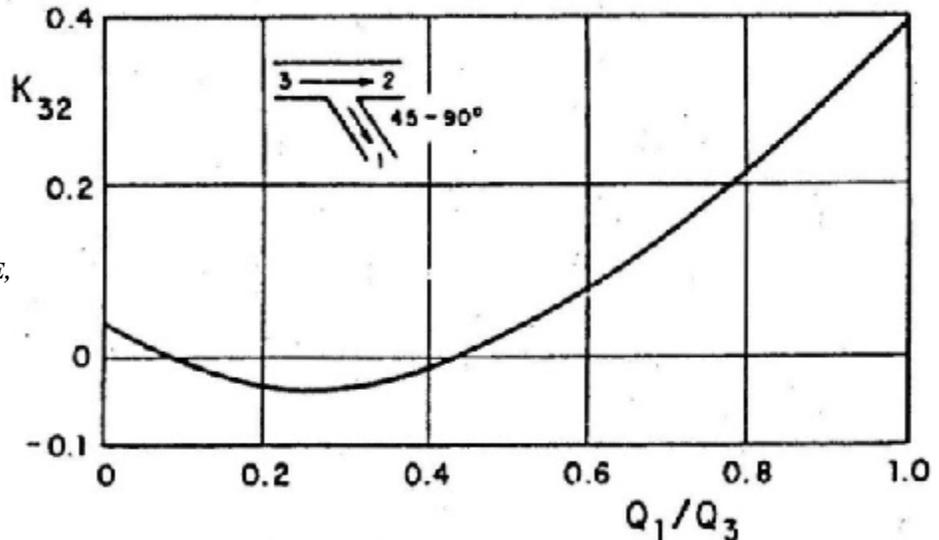


Figura 5. Bifurcaciones canto afilado con ángulo entre  $\theta = 45^\circ$  y  $90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-32}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$  (CFE, 1983).

La ecuación (7) es representativa de la curva, y se muestra a continuación:

$$K_{B-22} = \frac{0.0274 - 0.5621 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) + 1.0782 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2}{1 - 0.8524 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) + 2.4861 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 - 1.2027 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^3} \quad (7)$$

6. Bifurcaciones canto redondeado de radio  $r = 0.1 D_1$ , con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_2 = A_3 \neq A_1$ .

En la Fig. 6 se muestra el gráfico original.

La ecuación (8) es la base con sus complementarias (8a), (8b), (8c), (8d) y (8e), que se muestran a continuación:

$$K_{B-31} = \left[ a + b \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) + c \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 + d \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^3 + e \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^4 \right]^2 \quad (8)$$

$$a = \left[ 1.0279 + \left( \frac{-0.0618}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) + \left( \frac{0.0194}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2} \right) \right] \quad (8a)$$

$$b = \left[ -0.6971 + \left( \frac{1.8025}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) + \left( \frac{-0.9464}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{1.5}} \right) \right] \quad (8b)$$

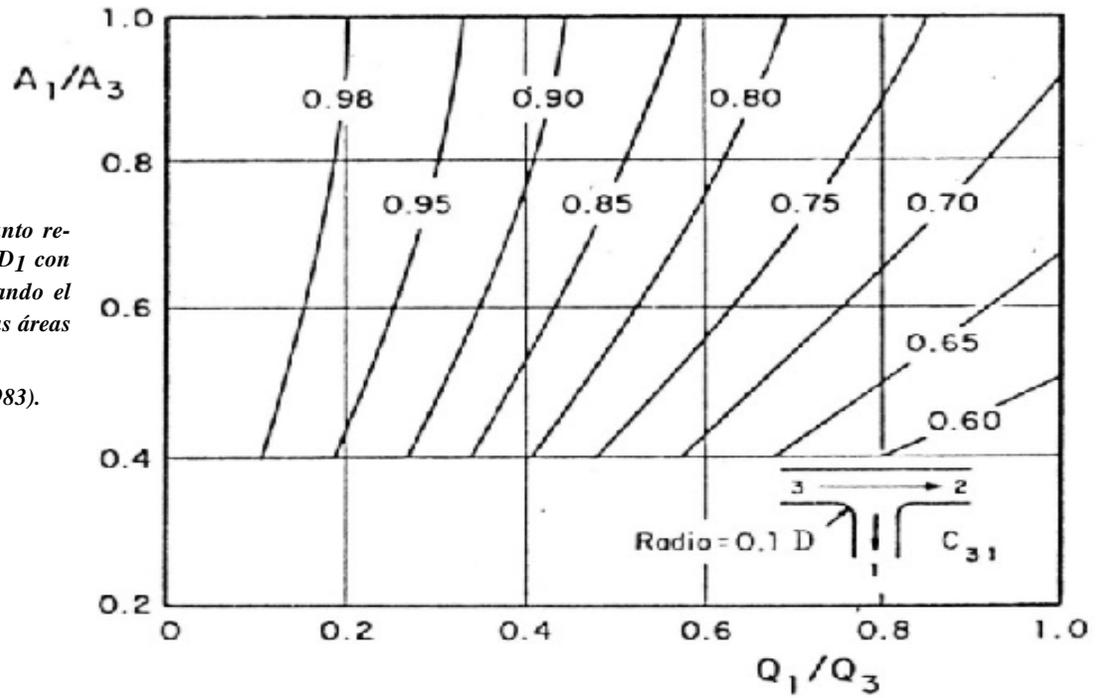


Figura 6. Bifurcaciones canto redondeado de radio  $r = 0.1 D_1$  con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $C_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal

$$A_2 = A_3 \neq A_1 \text{ (CFE, 1983).}$$

$$c = \left[ 0.5159 + \left( -1.584 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{1.5} \right) + \left( \frac{-0.1481}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2} \right) \right] \quad (8c)$$

$$d = \left[ \frac{1}{-0.6822 + \left( 2.0655 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{1.5} \right) + \left( 1.0685 \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right)} \right] \quad (8d)$$

$$e = \left[ \frac{1}{-17.1077 + \left( 12.109 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \left( -27.25 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right)} \right] \quad (8e)$$

$$a = \left[ 0.7678 + \left( 0.034 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \left( -0.0141 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2 \right) + \left( \frac{0.0111}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)} \right) + \left( \frac{-0.0013}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2} \right) \right] \quad (9a)$$

$$b = \left[ 1818.9259 + \left( -29192.379 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \left( 270985.02 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2 \right) + \left( -494171.74 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{2.5} \right) + \left( 259970.23 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^3 \right) \right] \quad (9b)$$

7. Bifurcaciones con reducción en el ramal secundario y ángulo  $\theta = 45^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 + A_2 = A_3$ .

En la Fig. 7 se muestra el gráfico original.

La ecuación (9) es la base con sus complementarias (9a), (9b), (9c), (9d) y (9e), (9f), (9g), (9h), que se muestran a continuación:

$$K_{B-31} = \frac{a + c \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 + e \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^4 + g \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^6}{1 + b \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 + d \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^4 + f \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^6 + h \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^8} \quad (9)$$

$$c = \left[ 22.5224 + \left( -23948.559 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \right]$$

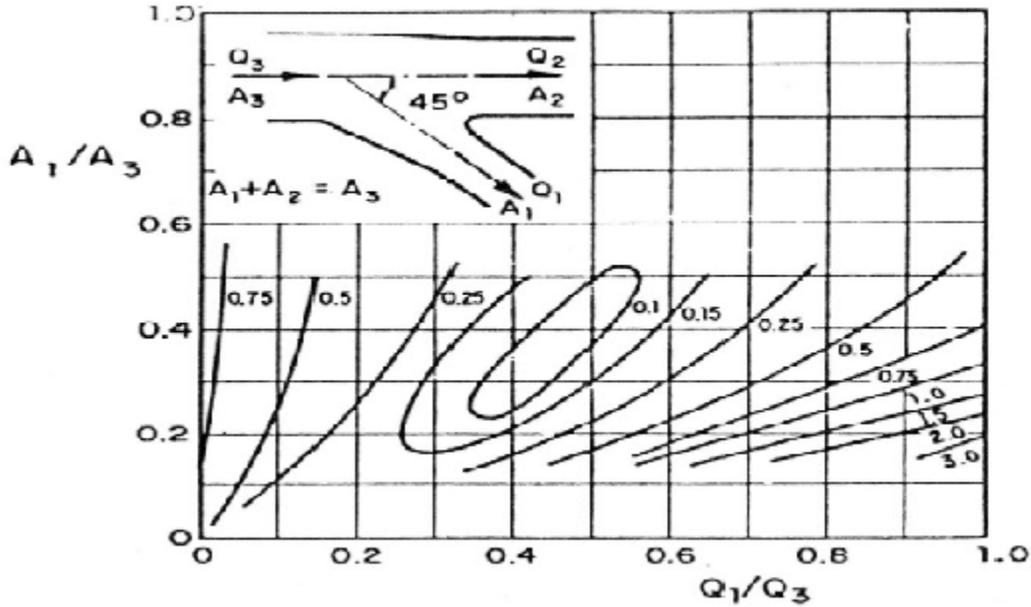


Figura 7. Bifurcaciones con reducción en el ramal secundario y ángulo  $\theta = 45^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 + A_2 = A_3$  (CFE, 1983).

$$\left( -35582.893 \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) + \left( \frac{-4048.2707}{\ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right)} + \left( \frac{-1.8647}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2} \right) \right) \right) \quad (9c)$$

$$f = \left[ 1409184.3 + \left( 31332101 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) + \left( 34999823 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2 \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) + \left( -21684082 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^3 + \left( -11736312 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{0.5} \right) \right) \right] \quad (9f)$$

$$d = \left[ -29337500 + \left( -34012578 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) + \left( -17447139 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{2.5} + \left( 29054577 \text{Exp} \left( \frac{A_1}{A_3} \right) + \left( 2156958.8 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{0.5} \right) \right) \right] \quad (9d)$$

$$g = \left[ -467271.36 + \left( 989883.25 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) + \left( -679639.07 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{0.5} \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) + \left( -511393.51 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{0.5} + \left( \frac{251.29875}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2} \right) \right) \right] \quad (9g)$$

$$e = \left[ 1591277.9 + \left( -1599961.6 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) + \left( 1557513.8 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{0.5} \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) + \left( -59089.092 \left( \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right)^2 + \left( \frac{-71.741491 \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right)}{\left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2} \right) \right) \right] \quad (9e)$$

(9e)

$$h = \left[ -936380.34 + \left( -20823355 \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \left( -23271660 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{0.5} \ln \left( \frac{A_1}{A_3} \right) \right) + \left( 14406162 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^2 \right) + \left( 7798318.5 \left( \frac{A_1}{A_3} \right)^{0.5} \right) \right] \quad (9h)$$

**NOTA:** La ecuación resultante tiene validez en la relación  $Q_1/Q_3$ , para todos los intervalos de valores desde 0 hasta 1.0, pero la relación  $A_1/A_3$ , únicamente tiene validez en los intervalos de valores de 0.3 hasta 0.6.

**8. Bifurcaciones en Y simétricas con ángulo  $\theta = variable^0$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 + A_2 = A_3$ .**

En la Fig. 8 se muestra el gráfico original.

La ecuación (10) es la base con sus complementarias (10a), (10b), (10c), (10d) y (10e), que se muestran a continuación:

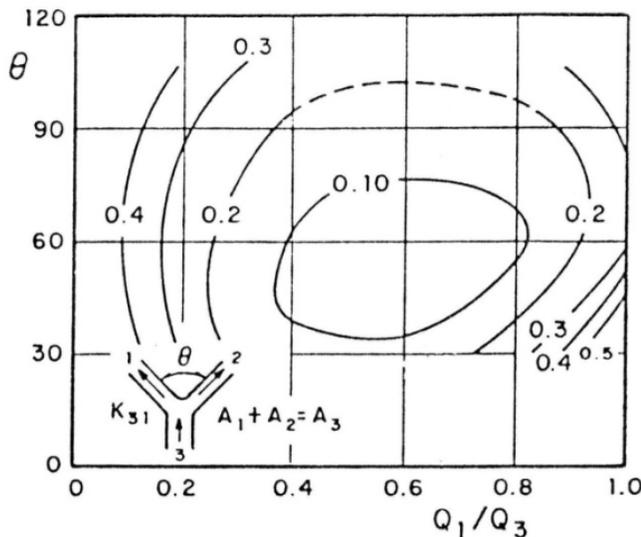


Figura 8. Bifurcaciones en Y simétricas con ángulo  $\theta = variable$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 + A_2 = A_3$  (CFE, 1983).

$$K_{B-31} = \left[ \frac{\alpha + c \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 + e \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^4}{1 + b \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 + d \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^4} \right]^{0.5} \quad (10)$$

$$\alpha = \left[ \frac{1}{2.7257 + (0.0048(\theta)^{1.5}) + (-4.3 \times 10^{-5}(\theta)^{2.5})} \right] \quad (10a)$$

$$b = [-5.9435 + (3.1737(\theta)) + (-0.2709(\theta)^{1.5})] \quad (10b)$$

$$c = \left[ -1.8016 + \left( \frac{-12269.353 \ln(\theta)}{(\theta)^2} \right) + \left( \frac{38560.237}{(\theta)^2} \right) \right] \quad (10c)$$

$$d = [-23.6448 + (-0.6144(\theta)) + (5.09 \times 10^{-5}(\theta)^3)] \quad (10d)$$

$$e = [6.3263 + (-0.0214(\theta) \ln(\theta)) + (4.22 \times 10^{-6}(\theta)^3)] \quad (10e)$$

**NOTA:** La ecuación resultante tiene validez en la relación  $Q_1/Q_3$ , para todos los intervalos de valores desde 0 hasta 1.0, pero para el ángulo de la bifurcación  $\theta$ , únicamente tiene validez en los intervalos de valores de  $30^0$ ,  $60^0$ ,  $90^0$  y  $105^0$ .

**9. Bifurcaciones en Y simétricas con ángulo  $\theta = variable^0$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 = A_2 = A_3$ .**

En la Fig. 9 se muestra el gráfico original.

La ecuación (11) es la base con sus complementarias (11a), (11b), (11c), (11d) y (11e), que se muestran a continuación:

$$K_{B-31} = \left[ \alpha + b \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) + c \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 + d \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^3 + e \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^4 \right]^{0.5} \quad (11)$$

$$\alpha = \left[ \frac{0.3232 + (-0.003845(\theta)) + (1.202 \times 10^{-5}(\theta)^2)}{1 + (-0.012(\theta)) + (2.759 \times 10^{-5}(\theta)^2)} \right] \quad (11a)$$

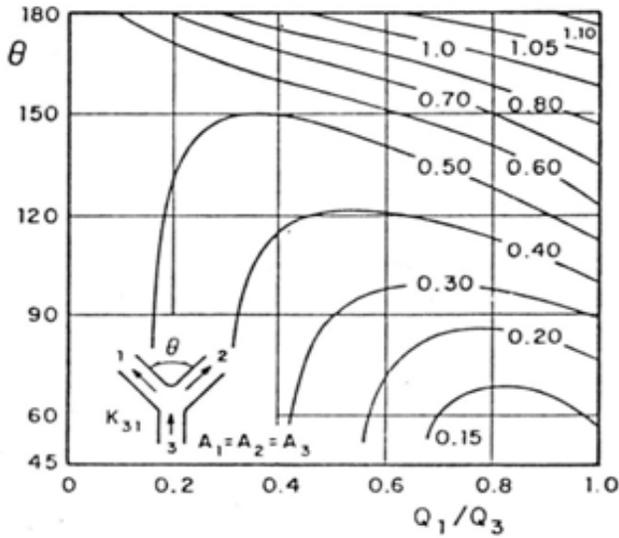


Figura 9. Bifurcaciones en Y simétricas con ángulo  $\theta = \text{variable}$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 = A_2 = A_3$  (CFE, 1983).

$$b = \left[ -1021.7743 + (-56.2327(\theta)) + (3.59 \times 10^{-5}(\theta)^{2.5}) + (-137.2397 (\theta)^{0.5} \ln(\theta)) + \left( \frac{e(\theta)}{\ln(\theta)} \right) \right] \quad (11b)$$

$$c = \left[ 36969.125 + (-43.5246(\theta)) + (1.4277(\theta)^{1.5}) + \left( \frac{-198953.94}{\ln(\theta)} \right) + \left( \frac{198854.23 \ln(\theta)}{(\theta)} \right) \right] \quad (11c)$$

$$d = \left[ -69571.308 + (81.8965(\theta)) + (-2.6842(\theta)^{1.5}) + \left( \frac{374393.49}{\ln(\theta)} \right) + \left( \frac{-374181.13 \ln(\theta)}{(\theta)} \right) \right] \quad (11d)$$

$$e = [9.69 + (-0.6114(\theta)) + (0.0116(\theta)^2) + (-8.89 \times 10^{-5}(\theta)^3) + (2.354 \times 10^{-7}\theta^4)] \quad (11e)$$

**NOTA:** La ecuación resultante tiene validez en la relación  $Q_1/Q_3$ , para todos los intervalos de valores desde 0 hasta 1.0, pero para el ángulo de la bifurcación  $\theta$ , únicamente tiene validez en los intervalos de valores de 45°, 60°, 90°, 120°, 150° y 180°.

10. Bifurcaciones para conductos cuadrados, canto afilado, con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 = A_2 = A_3$ .

En la Fig. 10 se muestra el gráfico original.

La ecuación (12) es representativa de la curva, y se muestra a continuación:

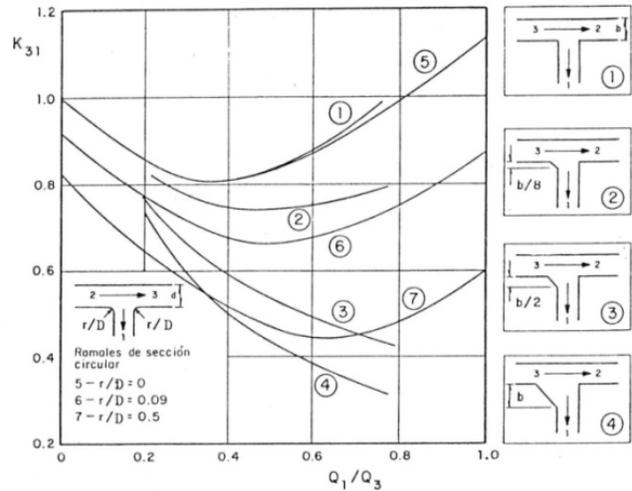


Figura 10. Bifurcaciones para conductos cuadrados, canto afilado, con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-31}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 = A_2 = A_3$  (CFE, 1983).

$$K_{B-31} = \left[ 0.9944 + \left( -0.744 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) \right) + \left( -0.1384 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 \right) + \left( -0.2732 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^3 \right) + \left( 13.8968 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^4 \right) + \left( -25.8349 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^5 \right) + \left( 13.854 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^6 \right) \right] \quad (12)$$

11. Bifurcaciones para conductos cuadrados, canto afilado, con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-32}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 = A_2 = A_3$ .

En la Fig. 11 se muestra el gráfico original.

La ecuación (13) es representativa de la curva, y se muestra a continuación:

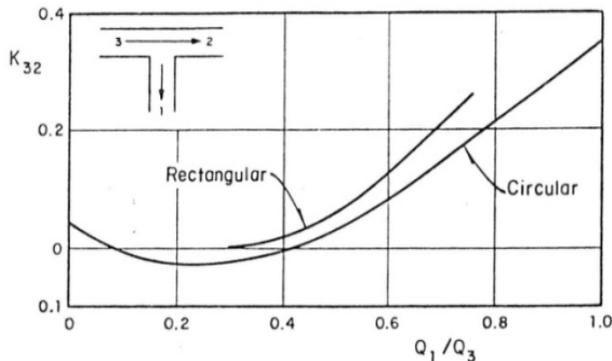


Figura 11. Bifurcaciones para conductos cuadrados, canto afilado, con ángulo  $\theta = 90^\circ$ , determinando el coeficiente  $K_{B-32}$ , siendo las áreas de sección transversal  $A_1 = A_2 = A_3$  (CFE, 1983).

$$K_{B-32} = \left[ -0.2682 + \left( 3.4321 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right) \right) + \left( -26.1224 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^2 \right) + \left( 43.0854 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^{2.5} \right) + \left( -19.7792 \left( \frac{Q_1}{Q_3} \right)^3 \right) \right] \quad (13)$$

## RESULTADOS

Considerando que no existe una recopilación y tratamiento de la información, similar al presente trabajo, las expresiones matemáticas aquí obtenidas, son de gran valía por su exactitud para constituir las en un programa de computación que permita la mecanización y rápida solución de problemas de diseño para este tipo de obras hidráulicas.

Cada una de las ecuaciones indicadas en el presente trabajo fueron probadas y comparados los resultados obtenidos con ellas, contra los obtenidos directamente de los gráficos originales, resultando con precisiones que varían desde un 95% hasta un 99.99%.

## CONCLUSIONES

◆ De las gráficas con curvas que presentan los investigadores mencionados en la bibliografía consultada, los autores las analizaron y posteriormente expresaron en forma de ecuaciones usando métodos para ajuste de curvas, teniéndose gran exactitud al comparar los resultados obtenidos con los gráficos y tablas de valores originales, contra los calculados con las ecuaciones de los Autores, por tanto resulta totalmente confiable lo expuesto en el presente artículo.

◆ Complemento ventajoso al presente trabajo será la elaboración de un programa para computadora, que maneje una metodología de cálculo usando las expresiones matemáticas aquí indicadas, que resuma la información y permita el procesamiento de datos.

◆ Bajo cualquier circunstancia, las bifurcaciones en conductos con circulación forzada tienen una cantidad considerable de pérdidas de energía en su trayecto, y el proyectista normalmente requiere estar consultando diferentes manuales y documentos para tratar de optimizar el sistema. Respecto al tema existen diversas publicaciones que aportan conocimientos valiosos, pero se ocupa tiempo para seleccionar y evaluar estos en el proceso de diseño; con el aporte del presente trabajo fueron seleccionados algunos de ellos y después de ser analizados y tratados matemáticamente para su actualización, son presentados aquí para un uso eficiente, seguro y exacto, que permite ahorros en el proceso de diseño y revisión de estas obras.

## REFERENCIAS

1. Balairón, P.L. (2002). *Gestión de Recursos Hídricos*. Universitat Politècnica Catalunya. Edición UPC, España. Disponible en World Wide Web: <http://books.google.com.mx/books?id=wPe4Hay95wUC&pg=RA1-PA342&lpg=RA1-PA342&dq=estudios+de+obras+hidr%C3%A1ulicas&source=web&ots=02L16DZE5T&sig=rdsfGSx0W-KdWHcwNEHFjz1jAJQ&hl=es>
2. CFE (1983). *Conducciones a Presión*, Tomo 2.3, *Hidrotecnia*. Comisión Federal de Electricidad, Instituto de Investigaciones Eléctricas, Manual de Diseño de Obras Civiles. México, DF.
3. Sotelo, A.G. (2003). *Hidráulica General*. Volumen I. Vigésimo séptima reimpresión. Editorial LIMUSA, México, DF.

Recibido: Septiembre del 2009  
Aprobado: Octubre del 2009