

Llenado y/o vaciado de depósitos en sistemas fuentes por bombeo. Parte III

Yaset Martínez Valdés

E-MAIL: yaset@civil.cujae.edu.cu

Centro de Investigaciones Hidráulicas, Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría"

David Ernesto Marón Domínguez

E-MAIL: dmaron@ceamat.cujae.edu.cu

Centro de Estudios de Matemáticas (CEMAT), Instituto de Ciencias Básicas (ICB), Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría"

RESUMEN

En el presente trabajo se realiza una comparación entre el modelo analítico y el modelo discreto para el cálculo de los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuente por bombeo, para los tres esquemas de operación típicos que se presentan en la práctica. Ambas metodologías de cálculo se comparan para 22 variantes que abarcan las tres tipologías de diseño y operación en dichos sistemas, utilizando para este fin la herramienta MATLAB versión R2024b. Se demuestra que los dos procedimientos arrojan valores aproximados en la mayoría de las variantes para los tres casos de estudio, con la excepción, de cuando el coeficiente característico de la conducción es cero. Haciendo un análisis de las ventajas y desventajas de ambos modelos, se concluye que el método discreto, el cual representa exactamente el fenómeno hidráulico de la simulación temporal del proceso, es el procedimiento que brinda las soluciones más precisas.

KEYWORDS: Llenado, vaciado, depósitos, sistemas fuentes, bombeo, comparación

Filling and/or emptying of reservoirs in pumped well systems. Part III

ABSTRACT

In this paper, a comparison is made between the analytical model and the discrete model for the calculation of tank filling and/or emptying times in pumped source systems, for the three typical operation schemes that are presented in practice. Both calculation methodologies are compared for 22 variants covering the three typologies of design and operation in these systems, using for this purpose the MATLAB tool version R2024b. It is shown that the two procedures yield approximate values in most of the variants for the three cases of study, with the exception of when the characteristic coefficient of the conduction is zero. Analyzing the advantages and disadvantages of both models, it is concluded that the discrete method, which accurately represents the hydraulic phenomenon of the temporal simulation of the process, is the procedure that provides the most accurate solutions.

PALABRAS CLAVES:

Filling, emptying, tanks, source systems, pumping, comparison

01 INTRODUCCION

La determinación de los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuente por bombeo es un tema que ha sido poco abordado en la literatura. Martínez y Marón (2023) proponen dos metodologías de cálculo con dos enfoques diferentes, uno analítico y otro discreto, este último mediante dos procedimientos, en función de la altura y del tiempo, con el objetivo de determinar el tiempo de llenado y/o vaciado de los depósitos en este tipo de sistemas fuentes.

Ambas metodologías, se centran en la resolución de un modelo de cálculo discreto y analítico que tienen en cuenta las principales variables hidráulicas que describen tres esquemas o casos de diseño y operación de los sistemas fuentes por bombeo. Los modelos de cálculo se implementan en el sistema de cómputo numérico MATLAB versión R2024b para la comparación de diferentes variantes de los esquemas de diseño descritos. Ambos procedimientos matemáticos se emplean en la resolución de ejemplos prácticos donde se ilustran los tres casos de operación para distintas variantes y alternativas de cálculo (Martínez y Marón 2024).

En el presente trabajo se utiliza la plataforma de programación y cálculo numérico MATLAB versión R2015a, para la comparación de ambos modelos en la obtención de los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuente por bombeo para diferentes variantes de los esquemas descritos. Se tienen en cuenta las principales variables hidráulicas que caracterizan los tres casos de diseño y operación con amplia presencia en la práctica de los sistemas fuentes por bombeo. Estos pueden ser descritos a partir de un esquema de diseño típico (esquemático según la dirección del flujo): fuente de abasto (depósito de succión de sección regular uniforme) → tubería(s) de succión (válvulas, accesorios, etc. se incluyen mediante su longitud equivalente característica) → estaciones de bombeo (bomba(s) de iguales o diferentes características hidráulicas) → tubería(s) de impulsión (válvulas, accesorios, etc. se incluyen mediante su longitud equivalente característica) → depósito de descarga (regulación o de compensación de sección regular uniforme con entrada libre y/o forzada con cota de entrega fija) (Martínez 2011).

Debido a que este tema no ha sido abordado con profundidad en la literatura, y debido al gran interés que presenta en el análisis y simulación de los sistemas fuente por bombeo, la determinación de los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuentes por bombeo, es que se ha decidido abordar en este trabajo la resolución de ambos modelos y su comparación para diferentes escenarios de operación.

02 DESARROLLO

A partir de un esquema típico de diseño definido, se pueden describir cuatro casos de estudio, los cuales mantienen la misma tipología de diseño, variando solamente las condiciones hidráulicas y de operación de dichas instalaciones. Para los objetivos que se pretenden exponer en este trabajo, el desarrollo de las metodologías de cálculo analítico y discreto se realiza solamente para los casos 2, 3 y 4, ya que el caso 1, al mantenerse constante el gasto de bombeo en el tiempo, este puede obtenerse mediante la ecuación de aforo volumétrico (Martínez y Marón 2023).

METODOLOGÍAS DE CÁLCULO PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS TIEMPOS DE LLENADO Y/O VACIADO DE LOS DEPÓSITOS EN LOS SISTEMAS FUENTE POR BOMBEO

ALGORITMO DEL MODELO DISCRETO PARA LOS TRES CASOS DE ESTUDIO

- **Modelo discreto en función de la altura**

El proceso de simulación consiste de los siguientes pasos (Martínez y Marón 2023) (Ballart 2018):

1. Para el instante t_0 (instante inicial de la simulación) se parte como conocidos los siguientes datos del sistema: información reológica (deben garantizarse que no cambian en el tiempo), características hidráulicas de las bombas rotodinámicas (en especial el polinomio representativo de la curva H vs. Q), materiales de las tuberías, diámetros, presión nominal de diseño y rugosidades absolutas, niveles de agua en los depósitos de succión y descarga, consumos en los nudos de unión (si existieren), números de tuberías que convergen o salen de los nudos y depósitos, así como la ecuación del área en planta del tanque en función de la altura del tanque (si los depósitos tienen tipología prismáticas o circulares, esta expresión es una constante igual al área en planta de los depósitos)
2. Para t_0 se determinan las condiciones de equilibrio hidráulico utilizando las ecuaciones básicas de Continuidad y de Bernoulli en régimen permanente, lo que permite el cálculo del caudal, Q_0 en el sistema y las cargas a presión en los nudos (si existieren). Para los depósitos, la solución anterior permite obtener los caudales de entrada y/o salida (llenado y/o vaciado). Para el instante inicial, t_0 la secuencia de cálculo sería:

A partir de la ecuación de Bernoulli aplicada para el instante inicial, t_0 se obtiene:

$$Z_{s0} + H_{B0} = Z_{t0} + hf_{s0} = Z_{t0} + K_n Q_0^n \quad (1)$$

Dónde: Z_{s0} : cota topográfica del nivel del agua en el depósito de succión para t_0 , (m); H_{B0} : carga que desarrolla la bomba para el caudal entregado en el instante inicial, Q_0 , (m); Z_{t0} : cota topográfica del nivel del agua en el depósito de descarga para t_0 , (m); hf_{s0} : pérdidas de carga que se producen en el sistema de tuberías para Q_0 , (m) y K_n : coeficiente característico de la conducción, (s^2/m^5).

Introduciendo en la expresión (1) el polinomio representativo de la curva característica H_B vs. Q , y calculándose las pérdidas de carga a partir de la ecuación de Darcy-Weisbach, se obtiene:

$$Z_{s0} + A \pm BQ_0 - CQ_0^2 = Z_{t0} + hf_{DW0} = Z_{t0} + K_{DW0}Q_0^2 \quad (2)$$

$$hf_{DW} = K_{DW}Q^2 = 0,0826 f \frac{L_{eq}}{D^5} Q^2 \quad (3)$$

Dónde: hf_{DW} : pérdidas de carga en la conducción obtenidas por la fórmula de Darcy-Weisbach, (m); hf_{DW0} : pérdidas de carga en la conducción obtenidas por la fórmula de Darcy-Weisbach para el instante t_0 , (m); f : coeficiente de fricción de la tubería determinado por la fórmula de Swamee-Jain, (adim.); L_{eq} : longitud equivalente del sistema, (m); D : diámetro interior de la tubería, (m); Q : caudal de circulación, (m^3/s); K_{DW} : coeficiente característico de la conducción, (s^2/m^5); K_{DW0} : coeficiente característico de la conducción para el instante t_0 , (s^2/m^5); A : coeficiente del polinomio representativo de la curva H vs. Q que define el valor de la carga que desarrolla la bomba para caudal cero, (m); B : coeficiente del polinomio característico de la curva H vs. Q que depende de la geometría del diseño de la bomba, (s/m^2) y C : coeficiente del polinomio específico de la curva H vs. Q que está en función de las pérdidas de carga en el interior de la bomba, (s^2/m^5).

$$f = \frac{0,25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{N_R^{0,9}} \right) \right]^2} \quad (4)$$

Dónde: f : coeficiente de fricción de la tubería, (adim.); ε : rugosidad absoluta asociada al material de la tubería, (m); D : diámetro interior de la tubería, (m) y N_R : número de Reynolds que caracteriza el flujo en la conducción, (adim.).

$$N_R = \frac{vD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} \quad (5)$$

Dónde: N_R : número de Reynolds que caracteriza el flujo en la conducción, (adim.); v : velocidad media de circulación en la tubería, (m/s); D : diámetro interior de la tubería, (m); ν : viscosidad cinemática del fluido, (m²/s) y Q : caudal de circulación en la conducción, (m³/s).

Introduciendo la expresión (3) en la (2), y resolviendo la ecuación de segundo orden resultante por el Teorema de Cardano-Vieta, se obtiene la siguiente expresión para el caso del instante inicial:

$$Q_0 = \frac{-\left(\mp B\right) + \sqrt{\left(\mp B\right)^2 - 4\left(K_{DW0} + C\right)\left(Z_{t0} - A - Z_{s0}\right)}}{2\left(K_{DW0} + C\right)} \quad (6)$$

El valor de K_{DW0} correspondiente para t_0 depende del valor de f_0 , lo cual deriva en un proceso iterativo en función de f :

- 2.1. Suponer un valor de f_0
- 2.2. Calcular K_{DW0} a través de la expresión (3)
- 2.3. Calcular Q_0 por la ecuación (6)
- 2.4. Calcular el valor de f_0 a partir de Q_0 obtenido en el paso anterior
- 2.5. Comparar el valor de f_{0c} con el valor supuesto en el primer paso, teniendo en cuenta un error relativo de parada, $\xi_r \leq 1\%$. Si esta condición no se cumple debe repetirse la rutina de cálculo hasta garantizar su consecución

3. Una vez obtenido el valor de Q_0 se procede con un proceso de discretización en función de Δh . Los valores de Δh pueden asumirse constantes o variables a lo largo de la altura del depósito, siendo la primera opción la más adecuada para depósitos de sección regular prismática. Como se ha apuntado anteriormente, mientras más pequeños sean los valores de Δh , se podrán obtener resultados numéricos más precisos. En este paso se procede a asumir el primer valor de h , h_1 siendo válido recordar que: H_t y/o H_c (según sea el caso) queda definido como la sumatoria de los diferentes intervalos h ($h_0 = 0$ (depósito de descarga vacío o depósito de succión lleno) para el instante inicial $t_0 = 0$), sean iguales o diferentes, según la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^n h_i = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n = H_{t,c} \quad (7)$$

4. Con el valor de h_1 se procede a calcular el volumen correspondiente a esa primera dovela atendiendo a la figura 1, como: $V_1 = A \cdot h_1$. Es evidente que la sumatoria de los diferentes volúmenes

será el volumen del depósito. El valor de h_1 se utilizará también para calcular la nueva cota Z_{t1} correspondiente a la cota topográfica del nivel del agua en el depósito de descarga para el tiempo t_1 como: $Z_{t1} = Z_{t0} + h_1$

5. Con estas dos variables definidas (V_1 y Z_{t1}), se pasará a repetir el paso 2 ahora para el cálculo de Q_1 , donde quedarán definidos en el proceso f_1 y K_{DW1}
6. Con ambos valores de gastos, Q_0 y Q_1 se procede a determinar el caudal medio, Q_{m1} que entra o sale de los depósitos en el intervalo de t_0 a t_1 , correspondiente a esa primera dovela

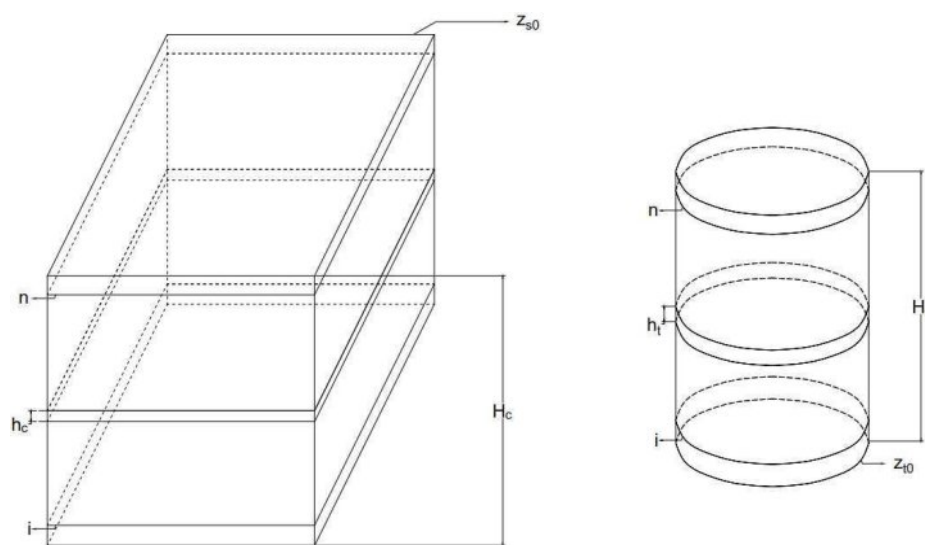


Figura 1. Esquemas de dos tipologías típicas de depósitos de sección regular.

7. Por último, con Q_{m1} y el V_1 se calcula el t_1 mediante la ecuación de aforo volumétrico:

$$Q = \frac{V}{t} \Rightarrow t_1 = \frac{V_1}{Q_{m1}} \quad (8)$$

Dónde: Q : caudal de llenado o vaciado de un depósito mediante bombeo, (m^3/s); V : capacidad volumétrica de un depósito, (m^3) y t : tiempo de llenado del depósito, (s).

8. Repetir el procedimiento para nuevos valores de h en el depósito para determinar los respectivos valores de tiempo de llenado o vaciado de cada dovela diferencial, t según sea el caso. El tiempo de llenado, t_{ll} o de vaciado, t_v de un depósito total o parcial, se calculará a través de la siguiente sumatoria de los tiempos de llenado o vaciado de cada dovela según la ecuación (9). Debe entenderse que a medida que el depósito de descarga o de aspiración se vaya llenando o vaciando, respectivamente, cada tiempo de llenado o vaciado de las dovelas va reduciendo su valor, o sea, se cumple que: $t_1 > t_2 > t_3 > \dots > t_n$.

$$\sum_{i=1}^n t_i = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n = t_{ll,v} \quad (9)$$

Para la aplicación del método del modelo discreto en función de la altura, se deben tener en cuenta varias particularidades que responden a cada caso. En este sentido, los casos 2 y 3 se pueden

considerar homólogos desde el punto de vista hidráulico. Atendiendo a esto, la ecuación (6) queda configurada para las n dovelas del depósito, para ambos casos, como:

$$Q_{i+1} = \frac{-(\mp B) + \sqrt{(\mp B)^2 - 4(K_{DW(i+1)} + C)(Z_{ti} + h_{t(i+1)} - A - Z_s)}}{2(K_{DW(i+1)} + C)} \quad (\text{Caso 2}) \quad (10.a)$$

$$Q_{i+1} = \frac{-(\mp B) + \sqrt{(\mp B)^2 - 4(K_{DW(i+1)} + C)(Z_t - A - Z_{si} + h_{c(i+1)})}}{2(K_{DW(i+1)} + C)} \quad (\text{Caso 3}) \quad (10.b)$$

Es importante recordar que en el caso 2, el nivel del agua en el depósito de succión se mantiene constante, Z_s , mientras que en el caso 3 esto es una condición establecida para el depósito de descarga, Z_t . En ambas ecuaciones, h_t y h_c se toman como las variaciones del nivel del agua definidas para los depósitos de descarga (Caso 2) y succión (Caso 3) respectivamente.

El Caso 4 se puede tomar como el caso general de este tipo de problemas. Como se ha descrito arriba, y atendiendo a la singularidad del mismo, se deduce que existe una relación entre los volúmenes de los depósitos de aspiración, V_c y descarga, V_t , tal que: $V_c = V_t$, a partir de considerar que no existen aportes ni salidas de volúmenes al sistema. Teniendo en cuenta ese principio, se obtienen las siguientes formulaciones:

$$h_c A_c = h_t A_t \therefore h_c = h_t \frac{A_t}{A_c}; h_t = h_c \frac{A_c}{A_t} \left| R_A = \frac{A_t}{A_c} \therefore h_c = h_t \frac{A_t}{A_c}; h_t = h_c \frac{A_c}{A_t} \right. \quad (11)$$

Dónde: h_c : variación de nivel en el depósito de succión, (m); A_c : área de la sección en planta del depósito de succión, (m²); h_t : variación de nivel en el depósito de descarga, (m); A_t : área de la sección en planta del depósito de descarga, (m²) y R_A : relación de áreas de los depósitos, (adim.)

Introduciendo en la ecuación (10) las relaciones descritas en la expresión (11) se obtienen las siguientes expresiones:

$$Q_{i+1} = \frac{-(\mp B) + \sqrt{(\mp B)^2 - 4(K_{DW(i+1)} + C)(Z_{ti} + h_{t(i+1)} - A - Z_{si} + h_{c(i+1)})}}{2(K_{DW(i+1)} + C)} \quad (12.a)$$

$$Q_{i+1} = \frac{-(\mp B) + \sqrt{(\mp B)^2 - 4(K_{DW(i+1)} + C)\left(Z_{ti} + h_{c(i+1)}\left(1 + \frac{1}{R_A}\right) - A - Z_{si}\right)}}{2(K_{DW(i+1)} + C)} \quad (12.b)$$

$$Q_{i+1} = \frac{-(\mp B) + \sqrt{(\mp B)^2 - 4(K_{DW(i+1)} + C)(Z_{ti} + h_{t(i+1)}(1 + R_A) - A - Z_{si})}}{2(K_{DW(i+1)} + C)} \quad (12.c)$$

- **Modelo discreto en función del tiempo**

El procedimiento analítico está estructurado por los siguientes pasos, de los cuales, los dos primeros, son los mismos para ambos métodos de cálculo, por lo cual se comienza desde el 3er paso (Martínez y Marón 2023) (Ballart 2018):

3. Una vez obtenido el valor de Q_0 se procede con un proceso de discretización en función de Δt . Es recomendable asumir valores constantes de Δt , sobre todo si se trata de depósitos de sección regular prismática. Al igual que en el caso del modelo de solución anterior, mientras más pequeños sean los valores de Δt (discretización más fina), se podrán obtener resultados numéricos más precisos. En este paso se adopta el concepto definido a través de la ecuación (9), asumiendo que, para el instante inicial, $t_0 = 0$.

4. A partir de introducir las siguientes relaciones (ecuación 13) en la expresión (2) para el cálculo del caudal en el instante t_{i+1} , se obtiene la fórmula (14) para los Casos 2 y 3:

$$h_t = \frac{\Delta V_t}{A_t} = \frac{Q_m t}{A_t} = \frac{(Q_i + Q_{i+1})t}{a}; a = \frac{l}{2A_t} \left| h_c = \frac{\Delta V_c}{A_c} = \frac{Q_m t}{A_c} = \frac{(Q_i + Q_{i+1})t}{b}; b = \frac{l}{2A_c} \right. \quad (13)$$

$$Z_s + A \pm BQ_{i+1} - CQ_{i+1}^2 = Z_{ti} + (Q_i + Q_{i+1})at + K_{DW(i+1)}Q_{i+1}^2 \quad (\text{Caso 2}) \quad (14.a)$$

$$Z_{si} - (Q_i + Q_{i+1})bt + A \pm BQ_{i+1} - CQ_{i+1}^2 = Z_t + K_{DW(i+1)}Q_{i+1}^2 \quad (\text{Caso 3}) \quad (14.b)$$

Tomando como referencia esta última ecuación, las soluciones para ambos casos para un tiempo t se determinan como:

$$Q_{i+1} = \frac{-(at \mp B) + \sqrt{(at \mp B)^2 - 4(K_{DW(i+1)} + C)(Z_t + Q_0 at - Z_s - A)}}{2(K_{DW(i+1)} + C)} \quad (\text{Caso 2}) \quad (15.a)$$

$$Q_{i+1} = \frac{-(bt \mp B) + \sqrt{(bt \mp B)^2 - 4(K_{DW(i+1)} + C)(Z_t + Q_0 bt - Z_s - A)}}{2(K_{DW(i+1)} + C)} \quad (\text{Caso 3}) \quad (15.b)$$

Como parte del proceso de cómputo de los caudales Q_{i+1} , se calcularán los respectivos coeficientes de fricción, f_{i+1} y $K_{DW(i+1)}$ según lo apuntado en el paso 2.

5. Una vez que se calcule un gasto, se trabajará con las relaciones definidas en la ecuación (13) en función del caso que se trate para determinar h_t o h_c para cada intervalo de tiempo, t

6. Se repetirá este proceso hasta lograr completar la altura útil del depósito que se evalúa según el caso (llenado: Caso 2 y vaciado: Caso 3) atendiendo al concepto de la ecuación (7).

A partir del significado que enuncia la expresión (11) y las relaciones a y b de la ecuación (13), se adapta la expresión (15) en función de la variable de referencia de medición, h_c o h_t , obteniéndose para el Caso 4:

$$Q_{i+1} = \frac{-(Nt \mp B) + \sqrt{(Nt \mp B)^2 - 4(K_{DW(i+1)} + C)(Z_{t0} + Q_0 Nt - Z_{s0} - A)}}{2(K_{DW(i+1)} + C)} \quad (h_c: f(h_t)) \quad (16.a)$$

$$Q_{i+1} = \frac{-(Mt \mp B) + \sqrt{(Mt \mp B)^2 - 4(K_{DW(i+1)} + C)(Z_{t0} + Q_0 Mt - Z_{s0} - A)}}{2(K_{DW(i+1)} + C)} \quad (h_t: f(h_c)) \quad (16.b)$$

$$N = a(I + R_a); M = b\left(\frac{I}{R_a} + I\right) \quad (16.c)$$

• Algoritmo del modelo analítico para los tres casos de estudio

El modelo analítico consiste en, a partir de la ecuación de Continuidad, obtener mediante integraciones el tiempo de llenado y/o vaciado de los depósitos en diferentes casos de estudio. Este método, al contrario del discreto, proporciona una solución directa sin iteraciones para los tres casos de esquema de operación (Ballart 2018) (Martínez y Marón 2024). Se trabaja a partir de los datos fundamentales del sistema fuente por bombeo: área en planta A_t (m^2) del depósito de descarga y/o succión, polinomio representativo de la curva H vs. Q , diámetro de la conducción, D_c , rugosidad absoluta o relativa de la tubería, y longitud equivalente del sistema de tuberías, L_c .

Caso 2

Como es conocido para este esquema de operación, la cota de succión, Z_s no varía con el tiempo. La ecuación de referencia para calcular el tiempo de llenado, t_{ll} del tanque de descarga, en alcanzar una determinada altura, h es:

$$t_{ll} = A_t \left(\left[\sqrt{a + bh_t} + B \ln \left| \sqrt{a + bh_t} - B \right| \right] - \left[\sqrt{a_0} + B \ln \left| \sqrt{a_0} - B \right| \right] \right) \quad (17)$$

Siendo en este caso las variables auxiliares definidas como: $a = B^2 - 4(C - K)(A - Z_{t0} + Z_s)$; $b = 4(C - K)$ y $a_0 = B^2 - 4(C - K_0)(A - Z_{t0} + Z_s)$.

Como caso particular, se tiene la situación cuando el coeficiente característico B , de la curva carga-capacidad toma un valor cero. Esto sucede para bombas rotodinámicas con una velocidad específica, N_q entre 53 a 57 (Martínez 2011). Para esta particularidad, la expresión para calcular el tiempo de llenado, t_{ll} , es:

$$t = 2A_t \left(\sqrt{K_0 - C} \sqrt{A - Z_{t0} + Z_s} - \sqrt{K - C} \sqrt{A - Z_{t0} + Z_s - h_t} \right) \quad (18)$$

Caso 3

En este caso el nivel de la descarga en el depósito de descarga, Z_t , será constante a medida que, el nivel de agua de la cisterna o depósito de succión, Z_s baja a medida que pasa el tiempo por la extracción de agua. Para este caso, lo que se pretende calcular es el tiempo en cual se vacía el cárcamo de bombeo, t_v , independientemente de que nivel de llenado alcance el depósito de descarga. Matemáticamente, esta variante de operación es análoga al Caso 2. De esta forma la expresión general para determinar el tiempo de vaciado, t_v , quedaría como:

$$t_v = A_c \left(\left[\sqrt{a + bh_c} + B \ln \left| \sqrt{a + bh_c} - B \right| \right] - \left[\sqrt{a_0} + B \ln \left| \sqrt{a_0} - B \right| \right] \right) \quad (19)$$

Para este caso, las variables complementarias definidas son: $a = B^2 - 4(C - K)(A - Z_t + Z_{s0})$; $b = 4(C - K)$ y $a_0 = B^2 - 4(C - K_0)(A - Z_t + Z_{s0})$.

Para el caso particular de cuando el coeficiente B es cero, se procede de igual forma que para el Caso 2, obteniéndose la ecuación:

$$t_v = 2A_c \left(\sqrt{K_0 - C} \sqrt{A - Z_t + Z_{s0}} - \sqrt{K - C} \sqrt{A - Z_t + Z_{s0} - h_c} \right) \quad (20)$$

Caso 4

El funcionamiento hidráulico-matemático de este caso son la conjunción de los casos 2 y 3. Para este esquema, a medida que se llena el depósito de descarga, se va vaciando el de succión. A partir de esta definición, se plantea la igualdad: $V_t = V_c$, donde el volumen extraído de la cisterna termina bombeado hacia el tanque de descarga, lo cual conduce a: $A_c h_c = A_t h_t$. A partir de esta igualdad de conservación de la masa en el tiempo, se pueden obtener dos expresiones, las cuales, pueden ser usadas indistintamente en este caso, en función de lo que se pretenda calcular:

$$t_{II} = \frac{A_t}{M} \left(\left[\sqrt{a + bMh_t} + B \ln \left| \sqrt{a + bMh_t} - B \right| \right] - \left[\sqrt{a_0} + B \ln \left| \sqrt{a_0} - B \right| \right] \right) \quad (21)$$

Siendo en este caso las variables auxiliares definidas como: $a = B^2 - 4(C - K)(A - Z_{t0} + Z_{s0})$; $b = 4(C - K)$; $a_0 = B^2 - 4(C - K_0)(A - Z_{t0} + Z_{s0})$ y $M = 1 + \frac{A_t}{A_c}$

Para la variante particular de $B = 0$, la expresión resultante es:

$$t_{II} = \left(\frac{2A_t}{M} \right) \left(\sqrt{K_0 - C} \sqrt{A - Z_{t0} + Z_{s0}} - \sqrt{K - C} \sqrt{A - Z_{t0} + Z_{s0} - Mh_t} \right) \quad (22)$$

APLICACIÓN DE LOS MODELOS DE CÁLCULO ANALÍTICO Y DISCRETO PARA LOS TRES CASOS DE ESTUDIO.

Se aplicarán los algoritmos de cálculo en sus dos modelos, analítico y discreto (procedimiento en función de la altura) para los Casos 2, 3 y 4 para la resolución de ejemplos prácticos para los tres tipos de instalaciones de los esquemas descritos. Los datos de estas variantes se muestran en la tabla 1 que consta de 22 variantes de cálculo. Para la confección de estas variantes, se deciden probar todas las formas posibles que se pueden presentar en dichos esquemas:

- Los coeficientes característicos de la conducción y del polinomio representativo de la curva característica de carga-capacidad de la bomba rotodinámica, K y B , respectivamente, toman valores distinto cero. Estos son los casos que representan la gran mayoría de los casos
- Las alternativas de $K \neq 0$ y $B = 0$, lo cual significa que la bomba rotodinámica cuenta con una curva H-Q modificada debido a un diseño especial, o producto de su diseño estándar o de este con modificaciones
- Las variantes donde $K = 0$ y $B \neq 0$, para aquellos casos donde trabajarán las bombas con sistemas estáticos puros ($\Delta Z \neq 0$ y $h_f = 0$)

- Aquellas alternativas donde $K = 0$ y $B = 0$, que se ven reflejados en la minoría de los casos de la práctica ingenieril.

A continuación, se explica cada variable: gasto de diseño de la bomba rotodinámica, Q ; carga de diseño de la bomba, H_d ; velocidad específica de la bomba rotodinámica, N_q ; diámetro interior de las tuberías de succión y de descarga; variación de nivel del agua entre los depósitos de succión y descarga, ΔZ ; nivel inicial del agua para el instante $t = 0$ en el depósito de descarga, Z_{to} ; nivel inicial del agua para el instante $t = 0$ en el depósito de succión, Z_{so} ; nivel máximo del agua en el depósito de descarga, Z_t ; Longitud equivalente del sistema de tuberías (succión y descarga), L_e y coeficientes característicos del polinomio representativo de la curva H vs. Q de la bomba rotodinámica, A , B y C .

Tabla 1. Datos de los esquemas de operación y bombas rotodinámicas asociadas.

N_q ar.	Q_d (L/s)	H_d (m)	N_q (adi m.)	D (m)	ΔZ (m)	Z_{so} (m)	Z_{to} (m)	Z_t (m)	L_e (m)	A (m)	B (s/m ²)	C (s ² /m ⁵)
1	60	80,00	16,0	0,2776	25,0	12,50	37,50	42,50	12849	83,14	387,49	-7331,64
2	60	80,00	16,0	0,2776	40,0	12,50	52,50	57,50	9345	83,14	387,49	-7331,64
3	80	58,00	23,6	0,2849	25,0	12,50	37,50	42,50	9343	63,65	169,50	-3002,29
4	80	58,00	23,6	0,2849	29,0	12,50	41,50	46,50	8210	63,65	169,50	-3002,29
5	100	47,00	30,8	0,3276	25,0	12,50	37,50	42,50	7074	54,23	84,05	-1563,25
6	100	47,00	30,8	0,3276	23,5	12,50	36,00	41,00	7556	54,23	84,05	-1563,25
7	120	40,00	38,1	0,3691	25,0	12,50	37,50	42,50	5346	48,40	41,28	-927,57
8	120	40,00	38,1	0,3691	20,0	12,50	32,50	37,50	7128	48,40	41,28	-927,57
9	140	35,00	45,5	0,377	25,0	12,50	37,50	42,50	3943	44,35	17,01	-598,69
10	140	35,00	45,5	0,377	17,5	12,50	30,00	35,00	6899	44,35	17,01	-598,69
11	160	32,00	52,0	0,4241	25,0	12,50	37,50	42,50	2960	42,17	3,75	-420,56
12	160	32,00	52,0	0,4241	16,0	12,50	28,50	33,50	6765	42,17	3,75	-420,56
13	170	31,30	54,5	0,4241	25,0	12,50	37,50	42,50	2775	41,85	0,00	-364,98
14	170	31,30	54,5	0,4241	15,6	12,50	28,15	33,15	6846	41,85	0,00	-364,98
15	180	29,00	59,4	0,4241	25,0	12,50	37,50	42,50	1832	39,87	-5,96	-302,34
16	180	29,00	59,4	0,4241	14,5	12,50	27,00	32,00	6640	39,87	-5,96	-302,34
17	200	28,00	64,3	0,469	25,0	12,50	37,50	42,50	1450	39,55	-10,34	-237,07
18	200	28,00	64,3	0,469	14,0	12,50	26,50	31,50	6765	39,55	-10,34	-237,07
19	220	27,00	69,3	0,469	25,0	12,50	37,50	42,50	1031	39,18	-13,70	-189,43
20	220	27,00	69,3	0,469	13,5	12,50	26,00	31,00	6957	39,18	-13,70	-189,43

$N_{ar}^{o_v}$	Q_d (L/s)	H_d (m)	N_q (adi m.)	D (m)	ΔZ (m)	Z_{so} (m)	Z_{to} (m)	Z_t (m)	L_e (m)	A (m)	B (s/m ²)	C (s ² /m ⁵)
21	240	26,00	74,5	0,5252	25,0	12,50	37,50	42,50	536	38,77	-16,32	-153,70
22	240	26,00	74,5	0,5252	13,0	12,50	25,50	30,50	6968	38,77	-16,32	-153,70

Además de esta información se declara que los depósitos de succión y descarga tienen una sección de diseño prismática y regular, siendo sus áreas en planta: $A_c = 1054,00 \text{ m}^2$ y $A_t = 527,00 \text{ m}^2$, respectivamente. Las alturas útiles en ambos depósitos son: $h_c = 2,50 \text{ m}$ y $h_t = 5,00 \text{ m}$ para la cisterna y el tanque de descarga, respectivamente; mientras que los volúmenes útiles para ambos reservorios son de $V_c = V_t = 2635,00 \text{ m}^3$.

Para el análisis de los tres casos de esquemas de operación, se tomarán como muestras las variantes 1, 2, 13, 14, 17, 18, 21 y 22 que abarcan todo el espectro del rango de operación. En la tabla 2 se presentan los resultados de los modelos analítico y discreto para el Caso 2 con una bomba. Se señala que para estas variantes se incluye en el análisis, la variación de la pendiente de la curva H vs. Q , P , obtenida a partir de la ecuación (23) (Sterling SIHI 2003).

$$P = \frac{H_0 - H_d}{H_d} \quad (23)$$

Donde: P : pendiente de la curva característica H vs. Q , (adim.); H_0 : carga de la bomba para caudal cero o válvula cerrada, (m) y H_d : carga de diseño de la bomba, (m).

Tabla 2. Resultados de los tiempos de llenado, tll, referentes del Caso 2 con una bomba.

Variantes	N_q (adim.)	Pendiente curva H vs. Q (adim.)	Alternativas	Caso 2		
				Tiempos de llenado (min.)		Error _{rel.} (%)
				Analítico	Discreto	
1	23,6	0,0974	$K \neq 0; B \neq 0$	592,78	619,18	4,264
1			$K = 0; B \neq 0$	373,94	373,94	0,000
2	23,6	0,0974	$K \neq 0; B \neq 0$	611,87	633,54	3,420
2			$K = 0; B \neq 0$	416,65	416,65	0,000
13	54,5	0,3371	$K \neq 0; B = 0$	272,53	282,19	3,423
13			$K = 0; B = 0$	222,33	222,33	0,000
14	54,5	0,3371	$K \neq 0; B = 0$	257,77	272,77	5,499
14			$K = 0; B = 0$	172,58	172,58	0,000
17	64,3	0,4125	$K \neq 0; B \neq 0$	237,47	242,78	2,183
17			$K = 0; B \neq 0$	215,92	215,92	0,000
18	64,3	0,4125	$K \neq 0; B \neq 0$	214,30	226,66	5,453

Variantes	N_q (adim.)	Pendiente curva H vs. Q (adim.)	Alternativas	Caso 2		
				Tiempos de llenado (min.)		Error _{rel.} (%)
				Analítico	Discreto	
18	74,5	0,4911	$K \neq 0; B \neq 0$	151,29	151,29	0,000
21			$K \neq 0; B \neq 0$	204,27	206,12	0,897
21			$K = 0; B \neq 0$	198,72	198,72	0,000
22	74,5	0,4911	$K \neq 0; B \neq 0$	174,14	183,95	5.333
22			$K = 0; B \neq 0$	129,54	129,54	0,000

En la figura 1 se observa el comportamiento de la variante 17 (error medio de todas las variantes) para la alternativa $K \neq 0$ y $B \neq 0$ (mayor error de las dos alternativas posibles) de los tiempos de llenado, H_t vs. t_{ll} . En la tabla 3 se muestran los resultados de los tiempos de vaciado, t_v para el Caso 3 bajo el mismo análisis realizado para el Caso 2. En la figura 2 se puede apreciar el comportamiento de la variante 17 (error medio de todas las variantes) para la alternativa $K \neq 0$ y $B \neq 0$ (mayor error de las dos alternativas posibles) de los tiempos de llenado, H_c vs. t_v .

Tabla 3. Resultados de los tiempos de vaciado, t_v , referentes del Caso 3 con una bomba.

Variantes	N_q (adim.)	Pendiente curva H vs. Q (adim.)	Alternativas	Caso 3		
				Tiempos de llenado (min.)		Error (%)
				Analítico	Discreto	
1	23,6	0,0974	$K \neq 0; B \neq 0$	610,57	637,73	4,259
1			$K = 0; B \neq 0$	383,21	383,21	0,000
2	23,6	0,0974	$K \neq 0; B \neq 0$	635,67	658,06	3,402
2			$K = 0; B \neq 0$	430,07	430,07	0,000
13	54,5	0,3371	$K \neq 0; B = 0$	317,67	329,35	3,546
13			$K = 0; B = 0$	258,15	258,15	0,000
14	54,5	0,3371	$K \neq 0; B = 0$	281,74	298,43	5,593
14			$K = 0; B = 0$	187,93	187,93	0,000
17	64,3	0,4125	$K \neq 0; B \neq 0$	290,92	297,88	2,336
17			$K = 0; B \neq 0$	264,56	264,56	0,000
18	64,3	0,4125	$K \neq 0; B \neq 0$	235,71	249,64	5,580
18			$K = 0; B \neq 0$	166,23	166,23	0,000
21	74,5	0,4911	$K \neq 0; B \neq 0$	259,82	262,40	0,983
21			$K = 0; B \neq 0$	253,08	253,08	0,000

Variantes	N_q (adim.)	Pendiente curva H vs. Q (adim.)	Alternativas	Caso 3		
				Tiempos de llenado (min.)		Error (%)
				Analítico	Discreto	
22	74,5	0,4911	$K \neq 0; B \neq 0$	192,05	203,17	5,473
22			$K = 0; B \neq 0$	143,04	143,04	0,000

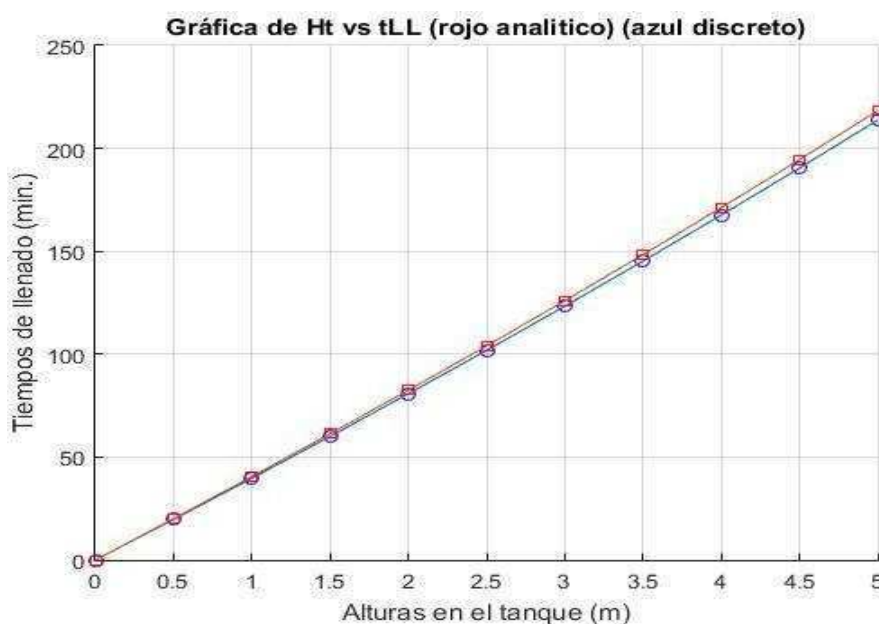


Figura 2. Gráfica H_t vs. t_{ll} de la variante 17, alternativa $K \neq 0$ y $B \neq 0$ para el Caso 2.

En la tabla 4 se exponen los resultados de los tiempos de llenado, t_{ll} , o vaciado, t_v , más indicativos del Caso 4, al igual que se procedió en los casos anteriores. En la figura 3 se observa el comportamiento de la variante 9 (error medio de todas las variantes) para la alternativa $K \neq 0$ y $B \neq 0$ (mayor error de las cuatro alternativas posibles) de los tiempos de llenado, H_t vs. t_{ll} o t_v .

Tabla 4. Resultados de los tiempos de llenado, t_{ll} , o vaciado, t_v , referentes del Caso 4 con una bomba.

Variantes	N_q (adim.)	Pendiente curva H vs. Q (adim.)	Alternativas	Caso 4		
				Tiempos de llenado (min.)		Error (%)
				Analítico	Discreto	
1	23,6	0,0974	$K \neq 0; B \neq 0$	551,66	583,26	5,418
1			$K = 0; B \neq 0$	393,09	393,09	0,000
2	23,6	0,0974	$K \neq 0; B \neq 0$	553,68	583,27	5,073
2			$K = 0; B \neq 0$	416,04	416,04	0,000
13	54,5	0,3371	$K \neq 0; B = 0$	265,31	259,42	2,270
13			$K = 0; B = 0$	211,85	211,85	0,000

Variantes	N_q (adim.)	Pendiente curva H vs. Q (adim.)	Alternativas	Caso 4		
				Tiempos de llenado (min.)		Error (%)
				Analítico	Discreto	
14	54,5	0,3371	$K \neq 0; B = 0$	256,37	258,65	0,882
14			$K = 0; B = 0$	167,12	167,12	0,000
17	64,3	0,4125	$K \neq 0; B \neq 0$	226,22	231,20	2,154
17			$K = 0; B \neq 0$	184,80	184,80	0,000
18	64,3	0,4125	$K \neq 0; B \neq 0$	208,62	220,58	5,422
18			$K = 0; B \neq 0$	136,22	136,22	0,000
21	74,5	0,4911	$K \neq 0; B \neq 0$	193,29	195,00	0,877
21			$K = 0; B \neq 0$	152,98	152,98	0,000
22	74,5	0,4911	$K \neq 0; B \neq 0$	169,41	178,88	5,294
22			$K = 0; B \neq 0$	108,93	108,93	0,000

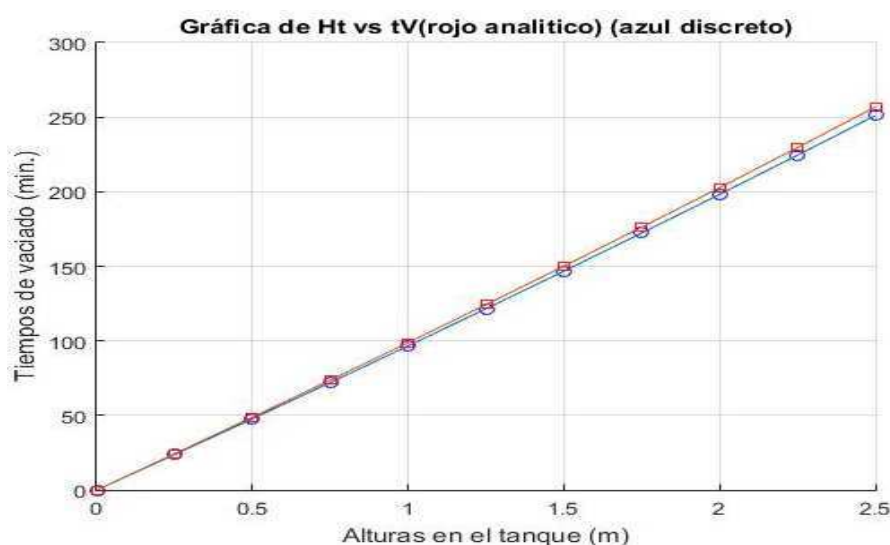


Figura 3. Gráfica H_c vs. t_v de la variante 17, alternativa $K \neq 0$ y $B \neq 0$ para el Caso 3.

03 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

De estos resultados se pueden generalizar algunas cuestiones relevantes. Para todos los casos, para las dos primeras alternativas: $K \neq 0$ y $B \neq 0$ y $K \neq 0$ y $B = 0$, los valores de los tiempos de llenado y/o vaciado en el modelo discreto son mayores que los del modelo analítico, siendo en las dos últimas alternativas: $K = 0$ y $B \neq 0$, $K = 0$ y $B = 0$, iguales los tiempos de llenado y/o vaciado para ambos modelos de cálculo. Los errores relativos en forma modular entre ambos procedimientos, de forma general, van disminuyendo a medida que aumenta la velocidad específica y son cero como se han apuntado para las alternativas: $K = 0$ y $B \neq 0$, $K = 0$ y $B = 0$.

Este fenómeno sucede para ambas alternativas para todas las variantes. En este sentido, se puede sacar como conclusión que, el principal parámetro que afecta en los casos de operación para lograr coincidencia en ambos modelos es K , siendo la variable B no tan influyente en los resultados. Se puede apreciar en las gráficas de la figura 4 que, el comportamiento analítico de estas funciones es casi lineal, aunque las ecuaciones resultantes para los tres casos son análogos a funciones polinomiales irracionales.

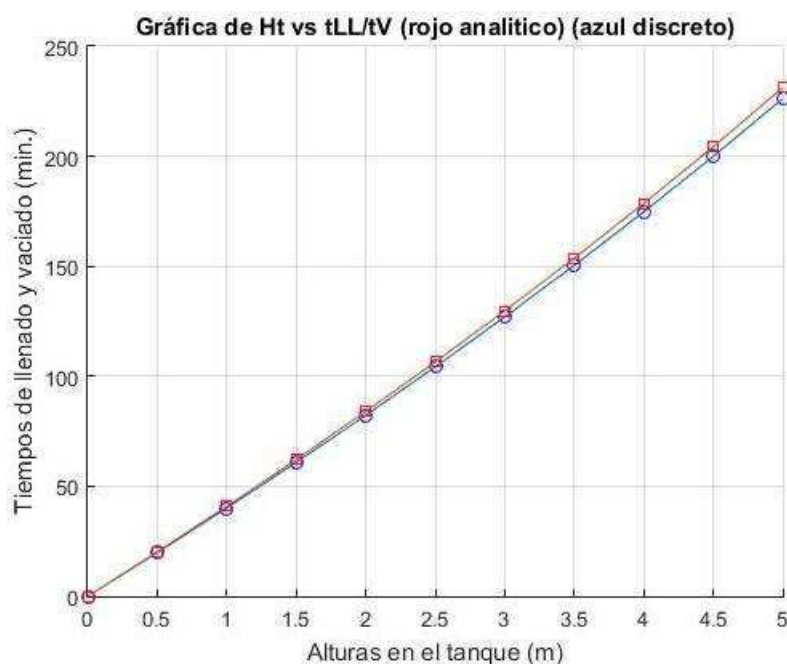


Figura 4. Gráfica H_t vs. t_{ll} o t_v , de la variante 17, alternativa $K \neq 0$ y $B \neq 0$ para el Caso 4.

Realizando un análisis de la variable K se puede apreciar que, a medida que este valor disminuye, los errores entre ambos modelos tienen el mismo comportamiento. Auxiliándonos de la ecuación (3), para lograr que el coeficiente característico de la conducción disminuya, deben reducirse los valores de f , L , aumentarse el diámetro, o la combinación de ambas situaciones. En la práctica, dado que el trazado de la conducción queda establecido, y, por lo tanto, la longitud de la tubería, solo serían plausibles las opciones de modificar f y D . No obstante, como es conocido, un incremento del diámetro, con una rugosidad absoluta ya definida en función del material elegido para la conductora, apunta directamente a una disminución de f y viceversa.

Por otro lado, a medida que aumenta N_q , lo hace en igual sentido la pendiente de la curva carga-capacidad, P . Una mayor pendiente, significa que el intervalo de gasto a recorrer durante el llenado y/o vaciado de los depósitos, ΔQ para una altura del depósito dado, h_t o h_c será menor y viceversa. Debido a eso es que, para velocidades específicas más grandes, para iguales condiciones de instalación, el error entre ambos métodos es menor. Todo esto conduce a la hipótesis comprobada de que la fuente de error en el cálculo del tiempo por ambos modelos, para los tres casos, reside en la variable K . Resulta que ella misma depende del gasto que se quiere integrar como función de la altura, dh en el método analítico, siendo la expresión resultante una función implícita de Q .

Por eso, cuando se elimina K en el análisis, se prescinde de ese error y se da la total coincidencia entre ambos modelos. Realizando un análisis de las ventajas y desventajas de los dos modelos, se finiquita que el método discreto, el cual representa fielmente el fenómeno hidráulico del proceso, es

el procedimiento que brinda las soluciones más precisas, aunque reconociendo que, aunque el método analítico es un procedimiento aproximado, resulta ser más sencillo que el discreto.

04 CONCLUSIONES

Como se ha apuntado anteriormente, esta es una línea de investigación poco estudiada en la literatura científica, lo cual lo hace un área temática aún abierta a investigaciones. Retomando la línea de investigación abordada en los dos artículos anteriores realizado por los autores, el objetivo de este trabajo se centró en realizar una mirada comparativa del modelo analítico y el discreto para el cálculo de los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuente por bombeo para los tres esquemas de operación mediante la herramienta MATLAB versión R2015a.

Ambas metodologías de cálculo se aplican a 22 variantes de aplicación práctica. Se demostró que los dos procedimientos arrojan valores aproximados en la mayoría de las variantes para los tres casos de estudio. Solo en aquellas variantes donde el coeficiente de conducción de la conductora es cero, coinciden ambos modelos para todos los casos. Haciendo un análisis de las ventajas y desventajas de ambos modelos, se concluye que el método discreto, el cual representa exactamente la hidráulica del proceso es el procedimiento que brinda las soluciones más precisas.

A tono con esto, se plantea que el método analítico es un procedimiento aproximado, aunque más sencillo que el discreto. Solo para el caso de cuando $K = 0$, se podrán usar cualquiera de ambos modelos. Se ratifica que ambas metodologías son de gran utilidad en problemas prácticos donde sea necesario determinar el tiempo de llenado y/o vaciado de depósitos en un sistema de bombeo. En un próximo trabajo, se seguirán presentando los resultados comparativos de ambos modelos para otros escenarios de simulación, así como otros aspectos interesantes sobre esta temática.

05 REFERENCIAS

- Ballart D.** (2018). "Determinación de los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuentes por bombeo", Trabajo de diploma, Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", Cujae, La Habana, Cuba
- Martínez Y.** (2011). "Metodología para el diseño hidráulico de las estaciones de bombeo para acueducto", Tesis de doctorado, Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", Cujae, La Habana, Cuba
- Martínez Y. y Marón D. E.** (2023). "Determinación del tiempo de llenado y/o vaciado de depósitos en sistemas fuentes por bombeo", Revista Ingeniería Hidráulica y Ambiental, XLIV (4): 75-88, Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", Cujae, ISSN-L:1680-0338, La Habana, Cuba
- Martínez Y. y Marón D. E.** (2024). "Llenado y/o vaciado de depósitos en sistemas fuentes por bombeo. Parte II.", Revista Ingeniería Hidráulica y Ambiental, XLV (4): 55-67, Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", Cujae, ISSN-L:1680-0338, La Habana, Cuba
- Sterling SIHI** (2003). "Principios básicos para el diseño de instalaciones de bombas centrífugas" (monografía), Sterling Fluid Systems Group, 7^{ma} edición, Madrid, España. Extraído de: <https://www.sterlingsihi.com/cms/es/Spain/home/navegacion-rapida/descargas/libros.html> en abril de 2024

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existen conflictos de intereses.

Contribución de los autores

Yaset Martínez Valdés <https://orcid.org/0000-0001-9770-022X>

Participó en el diseño de la investigación y en la elaboración de las metodologías de cálculo para la determinación del tiempo de llenado y/o vaciado de los depósitos en un sistema fuente por bombeo. Colaboró en el procesamiento de los datos del ejemplo abordado en el artículo, haciendo contribuciones en su análisis e interpretación, así como en la búsqueda de información en la literatura especializada y en la redacción final del trabajo.

David Ernesto Marón Domínguez <https://orcid.org/0000-0003-4198-9962>

Realizó contribuciones en el diseño de la investigación y tuvo a su cargo la creación de los algoritmos de cálculo para el software MATLAB versión R2015a. Participó en el análisis de los resultados del trabajo y en la revisión y redacción del manuscrito en su versión final. Colaboró en el procesamiento de los datos del ejemplo abordado en el artículo, haciendo contribuciones en su análisis e interpretación, así como en la búsqueda de información en la literatura especializada y en la redacción final del trabajo.