

Llenado y/o vaciado de depósitos en sistemas fuentes por bombeo. Parte II.

Yaset Martínez Valdés

E-MAIL: yaset1977@gmail.com

Profesional independiente

David Ernesto Marón Domínguez

E-MAIL: dmaron@cemat.cujae.edu.cu

Centro de Estudios de Matemáticas (CEMAT), Instituto de Ciencias Básicas (ICB),
Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", Cujae, La Habana.

RESUMEN

En el presente trabajo se propone una metodología de cálculo para determinar los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuente por bombeo. La misma, se centra en la resolución de un modelo analítico que tiene en cuenta las principales variables hidráulicas que caracterizan tres tipologías de diseño y operación en dichos sistemas. El mismo, se implementa en la plataforma de programación y cálculo numérico MATLAB versión R2015a para los tres casos de diseño descritos. El procedimiento analítico se emplea en la resolución de dos ejemplos prácticos reportados en la literatura comprobando la validez del mismo.

**PALABRAS
CLAVES:**

Llenado, vaciado, depósitos, sistemas fuentes, bombeo

Filling and/or emptying of tanks in pump source systems. Part II.

ABSTRACT

This paper proposes a calculation methodology to determine the filling and/or emptying times of reservoirs in pumped source systems. It focuses on the resolution of an analytical model that takes into account the main hydraulic variables that characterize three types of design and operation in these systems. It is implemented in the programming and numerical calculation platform MATLAB version R2015a for the three design cases described. The analytical procedure is used in the resolution of two practical examples reported in the literature, verifying its validity.

KEYWORDS: Filling, emptying, tanks, source systems, pumping

01 INTRODUCCION

Una de las características fundamentales de los modelos de análisis de redes hidráulicas es la presencia de la variable temporal. Así, el objetivo de un modelo no es únicamente obtener los valores de las variables significativas (como las presiones en nudos, velocidades y caudales en las tuberías) sino que se busca la obtención de la variación a lo largo del tiempo de éstas. Así, atendiendo a la presencia o no de la variable temporal, los modelos de análisis se pueden clasificar en: modelos de análisis estático también denominados modelos de análisis en régimen permanente; y los modelos de análisis dinámico, comúnmente designados como modelos de análisis en régimen transitorio (De Eça Guimaraes et al. 2012).

La determinación de los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuente por bombeo es uno de los aspectos que amerita ser estudiado por varios enfoques. Martínez y Marón (2023) abordan este problema mediante la propuesta de una metodología de cálculo para determinar los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuente por bombeo. La misma, se centra en la resolución de un modelo de cálculo discreto que tiene en cuenta las principales variables hidráulicas que caracterizan tres esquemas o casos de diseño y operación en dichos sistemas. Se presentan dos modelos de cálculo de enfoque discreto en función de la altura y el tiempo, los cuales se implementan en el sistema de cómputo numérico MATLAB versión R2015a para la comparación de diferentes variantes de los esquemas de diseño descritos. Ambos procedimientos analíticos se emplean en la resolución de un ejemplo práctico donde se ilustran los tres casos de operación para distintas variantes y alternativas de cálculo.

En el presente trabajo se propone una metodología de cálculo para determinar los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuente por bombeo, en este caso, basada en la resolución de un modelo de cálculo analítico. La misma, tiene en cuenta las principales variables hidráulicas que caracterizan tres casos de diseño y operación con amplia presencia en la práctica de los sistemas fuentes por bombeo. Estos pueden ser descritos a partir de un esquema de diseño típico (esquemático según la dirección del flujo): fuente de abasto (depósito de succión de sección regular uniforme) → tubería(s) de succión (válvulas, accesorios, etc. se incluyen mediante su longitud equivalente característica) → estaciones de bombeo (bomba(s) de iguales o diferentes características hidráulicas) → tubería(s) de impulsión (válvulas, accesorios, etc. se incluyen mediante su longitud equivalente característica) → depósito de descarga (regulación o de compensación de sección regular uniforme con entrada libre y/o forzada con cota de entrega fija) (Martínez 2011).

El modelo de cálculo de enfoque analítico se implementa en la plataforma de programación y cálculo numérico MATLAB versión R2015a para la comparación de diferentes variantes de los esquemas descritos. La metodología se emplea en los tres casos de operación a partir de distintas variantes y alternativas de cálculo que reflejan datos reales de las instalaciones de los esquemas descritos. Debido a que este tema no ha sido abordado con profundidad en la literatura, y debido al gran interés que presenta en el análisis y simulación de los sistemas fuente por bombeo, es que se ha decidido abordar esta temática en el presente trabajo.

02 DESARROLLO

A partir de un esquema típico de diseño definido, se pueden describir cuatro casos de estudio, los cuales mantienen la misma tipología de diseño, variando solamente las condiciones hidráulicas y de operación de dichas instalaciones. Para los objetivos que se pretenden exponer en este trabajo, el desarrollo de la metodología de cálculo se realiza solamente para los casos 2, 3 y 4, ya que el caso 1,

al mantenerse constante el gasto de bombeo en el tiempo, este puede obtenerse mediante la ecuación de aforo volumétrico. Los cuatro casos de estudio son los siguientes (Martínez y Marón 2023):

Caso 1: La entrada de agua al depósito de descarga es por la parte superior de este (entrega libre con cota fija), donde se succiona de un depósito en el cual se considera que el nivel de agua se considera fija (nivel en la succión no varía en el tiempo) (véase figura 1). En términos de operación, este es el único caso en el cual se mantiene constante el gasto de bombeo a lo largo del tiempo

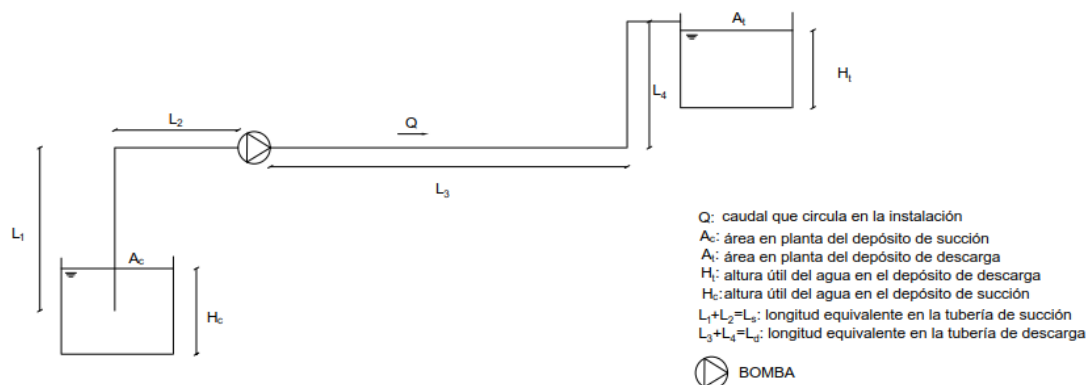


Figura 1. Esquema de diseño y operación de los Casos 1 y 3 (Fuente: Martínez y Marón 2023)

Caso 2: La entrada de agua al depósito de descarga es por la parte inferior de este (entrega forzada con cota fija) y el nivel del agua en el depósito de succión no varía en el tiempo. Este esquema de operación afecta en el gasto que entrega la bomba durante todo el intervalo de llenado del depósito de descarga (véase figura 2). Para este caso, el objetivo es calcular el tiempo de llenado del depósito de descarga, t_{ll}

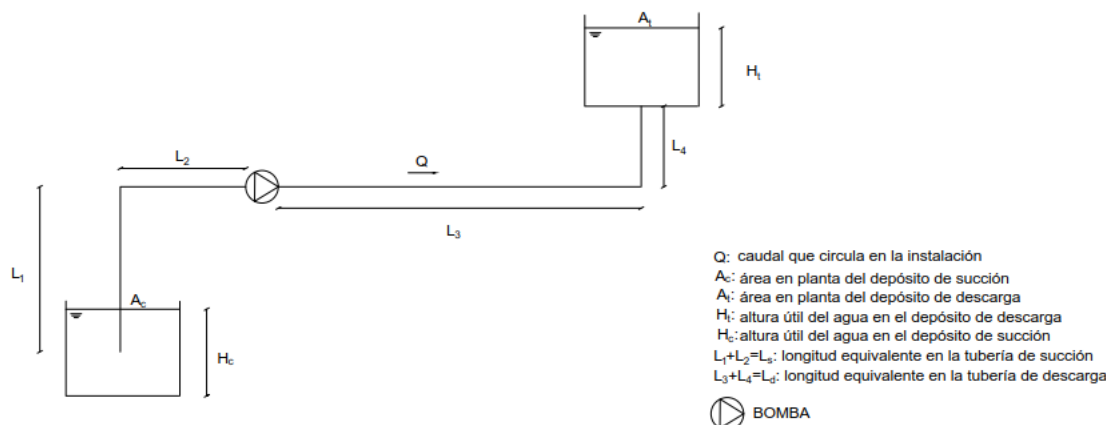


Figura 2. Esquema de diseño y operación de los Casos 2 y 4 (Fuente: Martínez y Marón 2023)

Caso 3: La entrada de agua al depósito de descarga es por la parte superior (entrega libre con cota fija) a la vez que disminuye el nivel en el depósito de succión producto del bombeo. Este esquema de operación afecta en el gasto que entrega la bomba durante todo el intervalo de vaciado del depósito de succión (véase figura 1). Para este caso, el objetivo es calcular el tiempo de vaciado del depósito de succión, t_v

Caso 4: La entrada de agua al depósito de descarga es por la parte inferior (entrega forzada con cota fija) a la vez que varía el nivel en el depósito de succión. Este esquema de operación implica que, a medida que se llena el depósito de descarga se vacía el de succión, lo cual repercute en el gasto que entrega la bomba, el cual se reduce en el tiempo, en este caso, por el “doble efecto” de la entrada

forzada al depósito de descarga y la disminución gradual en el tiempo del nivel del agua en el depósito de succión (véase figura 2). Para este caso es evidente que el tiempo de llenado y vaciado de ambos depósitos es el mismo, por lo cual basta con solo calcular uno de ellos, t_{II} o t_v .

METODOLOGÍAS DE CÁLCULO PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS TIEMPOS DE LLENADO Y/O VACIADO DE LOS DEPÓSITOS EN LOS SISTEMAS FUENTE POR BOMBEO

Cómo se ha apuntado, este es un tema que no cuenta con mucha divulgación en la literatura. Por ese motivo, Martínez y Marón (2023) consideraron conveniente abordarlo desde la óptica de dos modelos discretos de solución que arrojan el mismo resultado práctico, dependiendo del objetivo que se plantee. El objetivo del trabajo se centró en la elaboración de dos algoritmos para el cálculo de los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuente por bombeo, basados en dos modelos discretos en función de las variables altura y tiempo, los cuales son implementados mediante la herramienta MATLAB versión R2013b. Como antecedente a este trabajo, Arias (2015), utilizando el método discreto en función de la altura, logra proponer un algoritmo de cálculo para determinar el tiempo de llenado de un tanque de compensación con entrada sumergida.

Una variante de cálculo más próxima a la que se propondrá en este trabajo, es la planteada por Hernández et al. (2016), los cuales proponen una ecuación para determinar el tiempo de llenado de un depósito en un sistema de bombeo sencillo. El esquema de diseño se puede apreciar en la figura 3. Como hipótesis para la deducción de la ecuación de resolución, se plantean: depósito de descarga vacío para $t = 0$; este depósito y el de succión tienen sección regular y constante en planta (área rectangular) y ambos están abiertos a la atmósfera; la superficie libre del agua en el cárcamo de bombeo está al mismo nivel que el fondo del depósito que se llena; y se considera que la entrega al tanque de descarga es por la parte inferior del mismo (Caso 2). En dependencia a estos datos, se determina el tiempo de llenado de este depósito para una altura del tanque h , utilizando una ecuación en un modelo analítico propuesto por los autores.

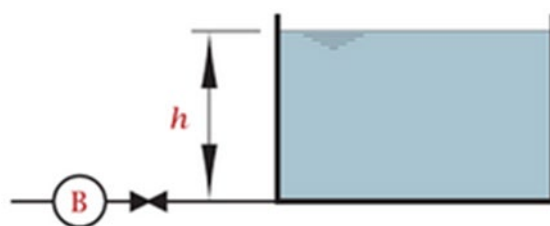


Figura 3. Esquema de la instalación del tanque y la bomba (Fuente: Hernández et al. 2016)

Por su parte, Gómez y Hernández (2016), trabajan con una instalación un poco más compleja, pero que, a efectos del cálculo del tiempo de llenado del depósito de descarga, es idéntico al caso anterior, con las mismas hipótesis de cálculo. En este ejemplo, trabajan dos bombas rotodinámicas idénticas dispuestas en paralelo, lo cual se deduce para los cálculos como una bomba equivalente a ambas bombas. Se conocen, además, que las tuberías tienen el mismo diámetro y la misma rugosidad relativa.

En la figura 4 se muestran los valores de las longitudes de las tuberías y los coeficientes de pérdidas de carga en las válvulas (cuando están totalmente abiertas). Para este esquema de diseño se determina el tiempo de llenado de este depósito para una altura del tanque h , utilizando una ecuación en un modelo analítico propuesto por los autores. Sobre ambos ejemplos y la ecuación analítica que proponen y sus hipótesis de cálculo volveremos más adelante.

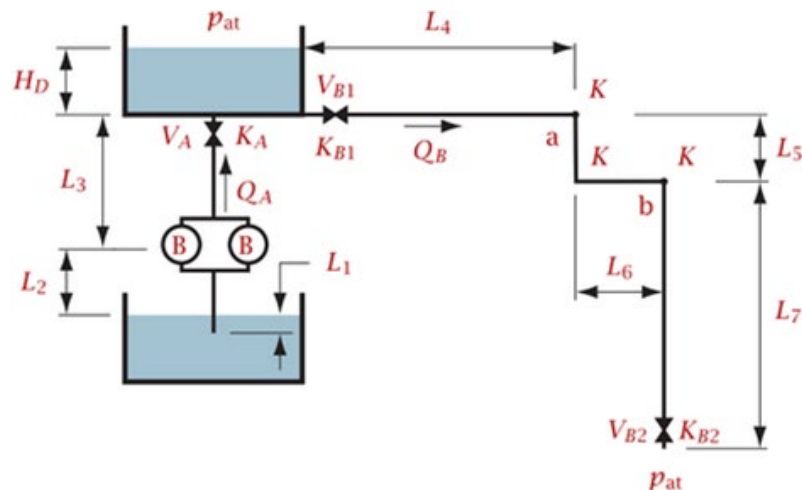


Figura 4. Esquema de la instalación del tanque y la bomba en paralelo (Fuente: Gómez y Hernández 2016)

ALGORITMO DEL MODELO ANALÍTICO PARA LOS TRES CASOS DE ESTUDIO

El modelo analítico consiste en, a partir de la ecuación de Continuidad, obtener mediante integraciones el tiempo de llenado y/o vaciado de los depósitos en diferentes casos de estudio. Este método, al contrario del discreto, proporciona una solución directa sin iteraciones. El desarrollo de estos algoritmos se realiza para los casos de estudio 2, 3 y 4, ya que el Caso 1, como se ha apuntado, al tener fija la cota de entrega de la tubería en el depósito de descarga, el tiempo de llenado se calcula de forma sencilla por aforo volumétrico (Ballart 2018).

Caso 2

Para el planteamiento del Caso 2, haciendo alusión a la figura 1, se tiene que el depósito elevado, de área en planta A_t (m^2), se llena con una bomba con características hidráulicas conocidas (para el tema a tratar, será suficiente con conocer el polinomio representativo de la curva H vs. Q) que toma agua desde un depósito de succión de área en planta A_c . La conducción tiene un diámetro D_c y una longitud equivalente L_c . En este caso, el nivel del cárcamo de bombeo no varía con el tiempo, es decir, se considera constante la cota de succión Z_s . Se trata para esta variante, de calcular el tiempo de llenado, t_{II} del tanque de descarga, en alcanzar una determinada altura, h .

Como es conocido, la variación del nivel en un depósito viene dada por la representación en el formato de ecuación diferencial ordinaria de la ecuación de Continuidad (principio de conservación de la masa) (Fuertes et al. 2007) (Martínez y Marón, 2023):

$$Qdt = A_t dh_t \quad (1)$$

Donde: Q : caudal entrante o saliente al/del depósito (caudal que impulsa la(s) bomba(s)), (m^3/s); dt : diferencial con respecto al tiempo de llenado o vaciado del depósito, (s); A_t : sección en planta del depósito, (m^2) y dh_t : diferencial respecto al nivel del agua en el depósito, (m).

A continuación, se aplica la ecuación de Bernoulli (principio de conservación de la energía), sustituyendo en esta el polinomio representativo de la curva característica H vs. Q de la bomba, obteniéndose:

$$Z_s + H_B = Z_t + hf_c = Z_s + A + BQ + CQ^2 = Z_t + KQ^2 \quad (2)$$

Donde: Z_s : cota de nivel del agua en el depósito de succión, (m); H_B : carga de la bomba, (m); Z_t : cota de nivel del agua en el depósito de descarga, (m); hf_c : pérdidas de carga en la conducción, (m); K : coeficiente característico de la conducción para un instante t , (s^2/m^5); A : coeficiente del polinomio representativo de la curva H vs. Q que define el valor de la carga que desarrolla la bomba para caudal cero, (m); B : coeficiente del polinomio característico de la curva H vs. Q que depende de la geometría del diseño de la bomba, (s/m^2), y C : coeficiente del polinomio específico de la curva H vs. Q que está en función de las pérdidas de carga en el interior de la bomba, (s^2/m^5).

Arreglando los términos de la ecuación (2) e igualando a cero, se obtiene:

$$(C-K)Q^2 + BQ + Z_s + A - Z_t = 0 \quad (3)$$

Introduciendo la sustitución del valor de la cota del agua en el tanque de descarga, Z_t como la suma: $Z_{t0} + h_t$, se obtiene el gasto por el teorema de Cardano-Vieta (se toma la solución positiva obviamente):

$$Q = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4(C-K)(Z_s + A - Z_{t0} - h_t)}}{2(C-K)} \quad (4)$$

Donde: Z_{t0} : cota del nivel del agua en el depósito de descarga para $t = 0$, (coincidiría con el nivel de la solera del tanque si este se encontrara vacío) (m), y h_t : altura del agua en el depósito de descarga para un tiempo t , (m).

El valor del coeficiente característico de la conducción se calculará por la expresión:

$$K = 0,0826 f \frac{L_{eq}}{D^5} \quad (5)$$

Donde: K : coeficiente característico de la conducción para un instante t , (s^2/m^5); f : coeficiente de fricción de la tubería determinado por la fórmula de Swamee-Jain para un instante t , (adim.), (adim.); L_{eq} : longitud equivalente del sistema, (m) y D : diámetro interior de la tubería, (m).

Como se apuntó, el coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach se determinará por la ecuación de Swamee-Jain:

$$f = \frac{0,25}{\left[\log \left(\frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{N_R^{0,9}} \right) \right]^2} \quad (6)$$

Donde: f : coeficiente de fricción de la tubería, (adim.); ϵ : rugosidad absoluta asociada al material de la tubería, (m); D : diámetro interior de la tubería, (m) y N_R : número de Reynolds que caracteriza el flujo en la conducción, (adim.).

$$N_R = \frac{vD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} \quad (7)$$

Donde: N_R : número de Reynolds que caracteriza el flujo en la conducción para un instante t , (adim.); v : velocidad media de circulación en la tubería para un instante t , (m/s); D : diámetro interior de la tubería, (m); ν : viscosidad cinemática del fluido (se considera que no cambie con el tiempo), (m^2/s) y Q : caudal de circulación en la conducción para un instante t , (m^3/s).

Para cualquier instante t y altura del nivel del agua en el depósito de descarga, h_t o succión, h_s , según sea el caso, se puede determinar el gasto a través de la ecuación (4) siguiendo un proceso iterativo en función de f (Martínez y Marón 2023):

1. Suponer un valor inicial de f_s
2. Calcular K a través de la expresión (5)
3. Calcular Q por la ecuación (4)
4. Calcular el nuevo valor de f_c a partir de Q obtenido en el paso anterior
5. Comparar el valor de f_c con el valor supuesto en el primer paso, f_s , teniendo en cuenta un error relativo de parada, $\xi_r \leq 1\%$. Si esta condición no se cumple debe repetirse la rutina de cálculo hasta garantizar su consecución.

Sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (1) se obtiene:

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4(C-K)(Z_s + A - Z_{t0} - h_t)}}{2(C-K)} dt = A_t dh_t \quad (8)$$

Integrando con respecto al tiempo se obtiene:

$$t = 2(C-K) A_t \int \frac{dh_t}{\sqrt{B^2 - 4(C-K)(A - Z_{t0} + Z_s - h_t) - B}} \quad (9)$$

Para integrar el miembro derecho de la ecuación (9) con más comodidad, se ajustan términos para concentrarlos en dos variables auxiliares, quedando:

$$a = B^2 - 4(C-K)(A - Z_{t0} + Z_s) \text{ y } b = 4(C-K) \quad (10)$$

Acoplando ambos términos en la ecuación (9) se consigue:

$$t = 2(C-K) A_t \int \frac{dh_t}{\sqrt{a + b h_t - B}} \quad (11)$$

Realizando la operación matemática de cambio de variable:

$$a + b h_t = u^2 \quad (12)$$

Por lo tanto:

$$b dh_t = 2u du \rightarrow dh_t = \frac{2u}{b} du \quad (13)$$

Se obtiene la ecuación (11) con un nuevo formato:

$$t = 2(C-K) A_t \int \frac{(2u/b du)}{u - B} = \frac{4}{b} (C-K) A_t \int \left(\frac{u - B + B}{u - B} \right) du \quad (14)$$

Se divide la integral por partes e integrando, queda la expresión:

$$t = \frac{4}{b} (C-K) A_t \left[\int du + B \int \frac{du}{u - B} \right] = \frac{4}{b} (C-K) A_t [u + B \ln |u - B|] + C_i \quad (15)$$

Donde: C_i es la constante de integración, (s).

Volviendo a introducir las ecuaciones agrupadas en (10), en la expresión (15), se obtiene:

$$t = \frac{4}{b} (C-K) A_t [\sqrt{a + b h_t} + B \ln |\sqrt{a + b h_t} - B|] + C_i \quad (16)$$

Para calcular la expresión que constituye la constante de integración, se sustituyen en la ecuación (16) valores conocidos de las variables, para este caso, se toman los datos iniciales: $t = 0$; $h_t = 0$; $Z_t = Z_{t0}$ y $K = K_0$ (para el caso cuando el depósito de descarga está vacío para $t = 0$).

$$C_i = -A_t [\sqrt{a_0} + B \ln |\sqrt{a_0} - B|] \quad (17)$$

Finalmente, sustituyendo las variables auxiliares y la constante C_i , se obtiene como resultado la ecuación (18) para calcular el tiempo de llenado, t_{ll} del depósito de descarga para el Caso 2:

$$t_{ll} = A_t ([\sqrt{a + bh_t} + B \ln |\sqrt{a + bh_t} - B|] - [\sqrt{a_0} + B \ln |\sqrt{a_0} - B|]) \quad (18)$$

Como caso particular, se tiene la situación de que el coeficiente característico B , de la curva carga-capacidad, toma un valor cero. Esto sucede para bombas rotodinámicas con una velocidad específica, N_q entre 53 a 57 (Martínez 2011). Se debe deducir que la resolución será más sencilla que la solución general, pero por lo importante de la comparación que se realizará más adelante, se realiza su desarrollo analítico. Asumiendo $B = 0$, la ecuación (3) quedaría como:

$$Z_s + A + CQ^2 = Z_t + KQ^2 \quad (19)$$

Despejando Q y se obtiene directamente:

$$Q = \sqrt{\frac{Z_s - A + Z_t}{C - K}} = \frac{\sqrt{Z_s + A - (Z_{t0} + h_t)}}{\sqrt{K - C}} \quad (20)$$

Haciendo uso de la ecuación (1) despejada en t queda:

$$t = A_t \int_Q^1 \frac{1}{Q} dh_t = A_t \sqrt{K - C} \int \frac{1}{\sqrt{Z_s + A - (Z_{t0} + h_t)}} dh_t = A_t \sqrt{K - C} \int \frac{1}{\sqrt{A - Z_{t0} + Z_s - h_t}} dh_t \quad (21)$$

Integrando se obtiene:

$$t = -2A_t \sqrt{K - C} \sqrt{A - Z_{t0} + Z_s - h_t} + C_i \quad (22)$$

Para encontrar la expresión de la constante de integración, C_i se trabajan con los datos iniciales: $t = 0$; $h_t = 0$ y $K = K_0$:

$$C_i = 2A_t \sqrt{K_0 - C} \sqrt{A - Z_{t0} + Z_s} \quad (23)$$

El resultado de la constante de integración, C_i se introduce en la ecuación (22):

$$t = 2A_t (\sqrt{K_0 - C} \sqrt{A - Z_{t0} + Z_s} - \sqrt{K - C} \sqrt{A - Z_{t0} + Z_s - h_t}) \quad (24)$$

Caso 3

El funcionamiento del Caso 3 se corresponde con la figura 2, donde para este caso, el nivel de la descarga en el depósito de descarga, Z_t , será constante a medida que, el nivel de agua de la cisterna o depósito de succión, Z_s baja a medida que pasa el tiempo por la extracción de agua. Para este caso, lo que se pretende calcular es el tiempo en cual se vacía el cárcamo de bombeo, t_v , independientemente de que nivel de llenado alcance el depósito de descarga. Matemáticamente, esta variante de operación es análoga al Caso 2.

De esta forma se puede llegar a la ecuación (25) repitiendo los pasos de las ecuaciones (1) a la (8) del Caso 2, obteniéndose:

$$t = 2(C + K)A_c \int \frac{dh_c}{\sqrt{B^2 - 4(C - K)(A - Z_t + Z_{s0} - h_c) - B}} \quad (25)$$

Adoptando nuevas variables complementarias para este caso:

$$d = B^2 - 4(C - K)(A - Z_t + Z_{s0}) \text{ y } e = 4(C - K) \quad (26)$$

La ecuación (25) queda:

$$t = 2(C - K) A_t \int \frac{dh_t}{\sqrt{d + e h_t - B}} \quad (27)$$

Se encamina todo el procedimiento igual al que se hizo en el Caso 2 obteniéndose:

$$t = A_c \left[\sqrt{d + e h_c} + B \ln \left| \sqrt{d + e h_c} - B \right| \right] + C_i \quad (28)$$

La constante de integración para este caso se calcula tomando las condiciones de partida: $t = 0$; $h_c = 0$ y $Z_s = Z_{s0}$. De esta forma se obtiene:

$$C_i = -A_c \left[\sqrt{d_0} + B \ln \left| \sqrt{d_0} - B \right| \right] \quad (29)$$

Donde: $d_0 = B^2 - 4(C - K_0)(A - Z_t + Z_{s0}) \quad (30)$

De esta forma la expresión general para determinar el tiempo de vaciado, t_v , quedaría como:

$$t_v = A_c \left(\left[\sqrt{d + e h_c} + B \ln \left| \sqrt{d + e h_c} - B \right| \right] - \left[\sqrt{d_0} + B \ln \left| \sqrt{d_0} - B \right| \right] \right) \quad (31)$$

Para el caso particular de cuando el coeficiente B es cero, se procede de igual forma que para el caso 2, obteniéndose la ecuación:

$$t_v = 2A_c \left(\sqrt{K_0 - C} \sqrt{A - Z_t + Z_{s0}} - \sqrt{K - C} \sqrt{A - Z_t + Z_{s0} - h_c} \right) \quad (32)$$

Caso 4

El funcionamiento hidráulico-matemático de este caso son la conjunción de los casos 2 y 3 que se puede apreciar en la figura 2. En este caso, a medida que se llena el depósito de descarga, se va vaciando el de succión. A partir de esta definición, se plantea la igualdad: $V_t = V_c$, donde el volumen extraído de la cisterna termina bombeado hacia el tanque de descarga, lo cual conduce a: $A_c h_c = A_t h_t$. A partir de esta igualdad de conservación de la masa en el tiempo, se pueden obtener dos expresiones, las cuales, pueden ser usadas indistintamente en este caso, en función de lo que se pretenda calcular:

$$h_c = \frac{A_t}{A_c} h_t = f h_t \text{ ó } h_t = \frac{A_c}{A_t} h_c = g h_c \quad (33)$$

Siguiendo los pasos de las ecuaciones (1) a la (8) del Caso 2, y trabajando con la ecuación (33) en función de h_t se obtiene:

$$t = 2(C - K)A_t \int \frac{dh_t}{\sqrt{B^2 - 4(C - K)(A - Z_{t0} + Z_{s0} - h_t(1 + f)) - B}} \quad (34)$$

Repitiendo los pasos del algoritmo establecidos para los casos anteriores, y declarando la variable $M = 1 + f$; evaluando la constante de integración, C_i para los datos iniciales: $t = 0$, $h_t = 0$, $h_c = 0$, $Z_t = Z_{t0}$ y $Z_s = Z_{s0}$, se obtiene el tiempo de llenado del depósito de descarga:

$$t_{II} = \frac{A_t}{M} \left(\left[\sqrt{a + bMh_t} + B \ln \left| \sqrt{a + bMh_t} - B \right| \right] - \left[\sqrt{a_0} + B \ln \left| \sqrt{a_0} - B \right| \right] \right) \quad (35)$$

Siendo en este caso las variables auxiliares definidas como: $a = B^2 - 4(C - K)(A - Z_{t0} + Z_{s0})$; $b = 4(C - K)$ y $a_0 = B^2 - 4(C - K_0)(A - Z_{t0} + Z_{s0})$.

Para la variante particular de $B = 0$, la expresión resultante es:

$$t_{II} = \left(\frac{2A_t}{M} \right) \left(\sqrt{K_0 - C} \sqrt{A - Z_{t0} + Z_{s0}} - \sqrt{K - C} \sqrt{A - Z_{t0} + Z_{s0} - Mh_t} \right) \quad (36)$$

Como se puede observar, las ecuaciones resultantes para calcular los tiempos de bombeo: tiempo de llenado, t_{II} (ecuaciones (17) y (24) para el Caso 2), tiempo de vaciado, t_v (ecuaciones (31) y (32) para el Caso 3) y tiempo de llenado o vaciado según el enfoque (ecuaciones (35) y (36) para el Caso 4) tienen un formato similar. Para ilustrar el desarrollo de la metodología de cálculo se realizará la validación de los algoritmos desarrollados, a partir de dos problemas resueltos en la literatura reportados por Hernández et al. (2016) y Gómez y Hernández (2016) que corresponden, ajustándolos a los algoritmos planteados anteriormente, a un modelo analítico para el Caso 2. Se ha procurado mostrar un ejemplo práctico sencillo para garantizar una mejor comprensión del procedimiento analítico. Para la resolución del mismo se ha empleado el software MATLAB versión R2015a.

CÁLCULO DEL TIEMPO DE LLENADO DE UN DEPÓSITO EN UN SISTEMA FUENTE POR BOMBEO.

Para la resolución del primer problema, descrito anteriormente y cuyo esquema se ilustra en la figura 3 se tienen los siguientes datos y condiciones que modelan la solución. La bomba deberá llenar un depósito que se encuentra inicialmente vacío, con una sección horizontal en planta de área A . Se conoce además que la tubería de aspiración toma el agua desde un depósito abierto a la atmósfera, en el que la superficie libre del agua en el depósito de succión está al mismo nivel que el fondo del depósito que se llena, se conoce que la entrada del agua es por la parte inferior del mismo (Caso 2).

De las características de dicha instalación se determina el tiempo necesario para que el líquido alcance en el depósito una altura h (m), conocidos los datos: $H_0 = 36,00$ m, $Q_0 = 0,30$ m³/s, $C = 500,00$ s²/m⁵, $A = 1,00$ m² y $h = 20,00$ m. En el ejemplo, estas magnitudes se consideran constantes. La bomba rotodinámica utilizada para llenar el depósito tiene la particularidad de que el coeficiente característico B , de la curva característica de carga-capacidad es igual a cero, siendo su expresión para una determinada velocidad de trabajo:

$$H = H_0 [1 - (Q/Q_0)^2] \quad (37)$$

La ecuación para el cálculo de las pérdidas de carga en la instalación viene dada por:

$$H\phi = CQ^2 \quad (38)$$

En este momento se hace necesario realizar algunas aclaraciones: primero, se supone que el coeficiente C , coeficiente característico de la conducción, K , es constante, algo que no es cierto; segundo, debe entenderse a $H\phi$ como hf ; tercero, el coeficiente B se asume como cero sin brindar información alguna sobre la bomba en cuanto a sus características hidráulica de diseño, especialmente, su velocidad específica, N_q ; y cuarto, y último, debe entenderse que en la ecuación (37), la relación $H_0/(Q_0^2)$ vendría siendo el coeficiente C característico de la curva H vs. Q .

A partir de esta información y sustituyendo las ecuaciones (37) y (38) en la ecuación de Continuidad (1), e integrando la expresión resultante desde $h = 0$ hasta un valor genérico h , resulta:

$$t^* = 2K \left[1 - (1 - h^*)^{1/2} \right] \quad (39)$$

Con las siguientes expresiones complementarias que forman parte de la ecuación (39):

$$t^* = \frac{Q_0}{H_0 A} t; \quad h^* = \frac{h}{H_0}; \quad K = \left(1 + C \frac{Q_0^2}{H_0} \right)^{1/2} \quad (40)$$

Sustituyendo los valores del enunciado, para $h = h_t = 20,00$ m, se obtiene $t^* = 1$ y $t = t_{II} = 120$ s.

Luego se procede a realizar la corrida en la herramienta de MATLAB versión R2015a según el modelo analítico del Caso 2, para el caso particular de $B = 0$, si bien puede realizarse con la ayuda de una hoja Excel o bien manualmente. Para el trabajo con la ecuación (24) se debe tener en cuenta que, para este ejemplo, $Z_{to} = Z_s$, por lo cual, esta quedaría reducida a la forma de la ecuación (41):

$$t_{II} = 2A_t \left(\sqrt{K_{0,0} - C\sqrt{A}} - \sqrt{K_{t,ht} - C\sqrt{A - h_t}} \right) = 2A_t \left(\sqrt{K_{0,0} - C\sqrt{A}} - \sqrt{K_{t_{II},20} - C\sqrt{A - h_t}} \right) \quad (41)$$

Donde: $K_{0,0}$: coeficiente característico de la conducción para las condiciones: $t = 0$ y $h_t = 0$ (tanque vacío en este caso), (s^2/m^5) y $K_{t,ht}$: coeficiente característico de la conducción para las condiciones: $t = t_{II}$ y $h_t = 20,00$ m (tanque lleno en este caso), (s^2/m^5).

Como resultado se obtiene que el $t_{II} = 2$ min. = 0,0333 $h = 120$ s, validando el método analítico propuesto. Además, aunque es válida la comparación de ambos modelos analíticos, se comprueba también con el modelo discreto planteado Martínez y Marón (2023), obteniéndose el mismo resultado como se puede apreciar en la figura 5.

Para el ejemplo propuesto por Gómez y Hernández (2016), se trabaja con una instalación en la cual se encuentra un depósito superior de sección transversal de área $A = 4,00$ m², (ver figura 4), que se llena mediante dos bombas rotodinámicas idénticas dispuestas en paralelo que toman agua desde el depósito inferior a la vez que el tanque de descarga se vacía a través de una tubería. Los datos son los siguientes: todas las tuberías tienen el mismo diámetro interior $D_{int.} = 10,00$ cm y la misma rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,10$ mm; ambos depósitos están abiertos a la atmósfera; se asume el valor de la densidad del agua como la nominal para temperatura y presión estándar; y los valores de las longitudes de las tuberías y los coeficientes de pérdidas de carga en las válvulas (cuando están totalmente abiertas), así como otras pérdidas locales indicadas en la figura 4 son los siguientes: $L_1 = 0,50$ m, $L_2 = 2,00$ m, $L_3 = 8,00$ m, $L_4 = 30,00$ m, $L_5 = 4,00$ m, $L_6 = 5,00$ m, $L_7 = 18,00$ m, $K = 0,50$ m, $K_A = 5,00$, $K_{B1} = 4,00$.

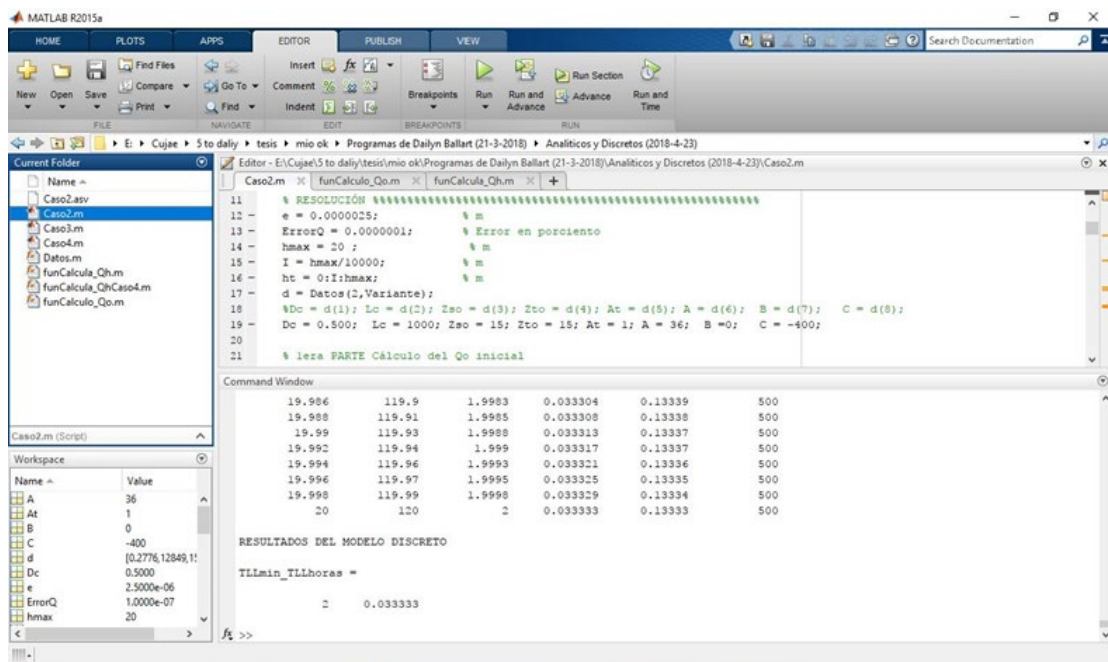


Figura 5. Código de programación del software MATLAB versión R2015a para el modelo de solución del Caso 2 para el caso particular de $B = 0$ (discretización por altura).

Del problema propuesto por los autores, nos centraremos en resolver el inciso dedicado a calcular el tiempo de llenado del depósito de descarga, por lo cual la válvula V_{B1} se mantiene cerrada y la V_A completamente abierta. La curva característica de la combinación de las bombas en paralelo para una velocidad de giro n se expresa por la ecuación:

$$H = 30[1 - (Q/0,08)^2] = 30 - 4687,5Q^2 \quad (42)$$

Por otro lado, la ecuación de la curva del sistema se determina como:

$$H_{sist} = 2 + 8 + 5 + \left(0,02 \frac{(0,5 + 2 + 8)}{0,1} + 5 + 1\right) \frac{8Q^2}{\pi^2(9,81)(0,1)^4} = 15 + 6692,8 Q^2 \quad (43)$$

Igualando las ecuaciones (42) y (43) se consigue la expresión en función de la altura h_t :

$$Q = A_t \frac{dh_t}{dt} = \frac{\sqrt{20 - h_t}}{106,7} \quad (44)$$

Integrando la ecuación (44), y trabajando con las expresiones complementarias de igual forma que en el problema anterior, se obtiene el tiempo de llenado del tanque superior para una $h_t = 5,00$ m: $t_{II} = 8.5222$ min. = $0,14204$ h = $511,3$ s.

En la figura 6 se presenta el código de programación del software MATLAB versión R2015a del modelo de solución discreto del Caso 2 para el caso particular de $B = 0$ (ecuación 24), empleado para este problema con los ajustes hechos para este caso. Se puede apreciar que se obtiene el mismo resultado.

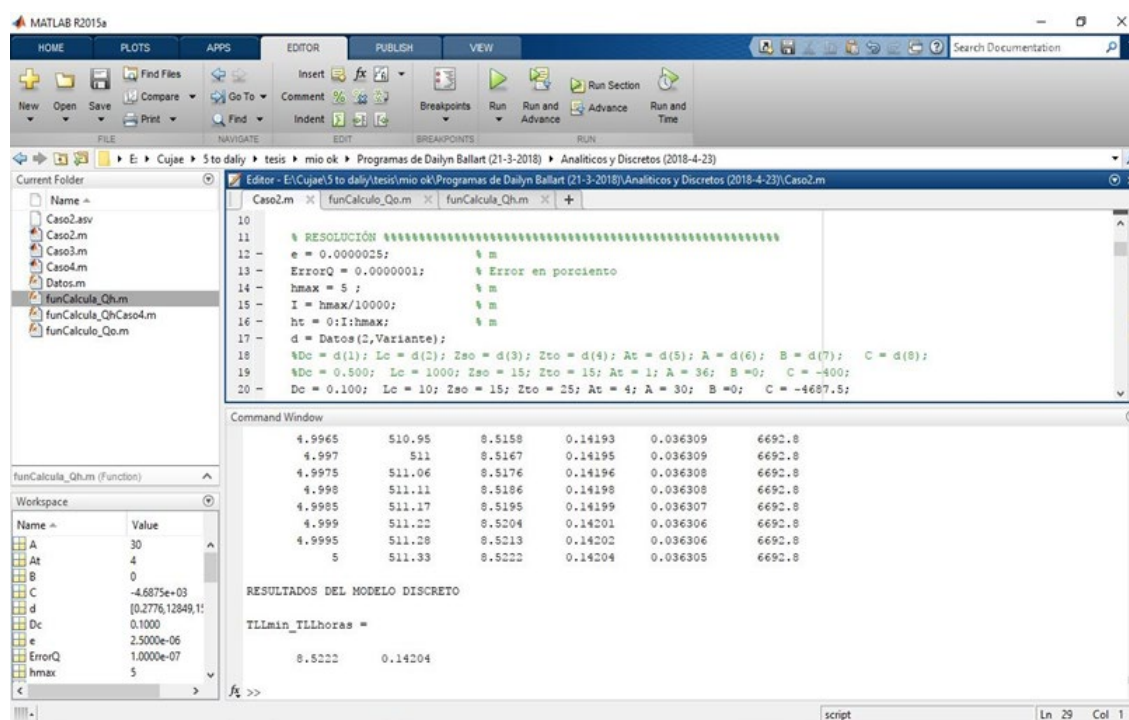


Figura 6. Código de programación del software MATLAB versión R2015a para el modelo de solución del Caso 2 para el caso particular de $B = 0$ (discretización por altura).

03 CONCLUSIONES

Como se ha apuntado anteriormente, este es un tema poco abordado en la literatura científica, lo cual lo hace un área temática aún abierta a investigaciones. En este sentido, los autores han publicado un primer trabajo donde se aborda esta problemática desde la mirada de un modelo discreto en función de la altura y el tiempo. Se demostró que ambos arrojan iguales resultados, por lo cual pueden ser utilizados en función de la respuesta que se pretende alcanzar. El objetivo de este trabajo, al igual que su predecesor, se centró en la elaboración de un algoritmo para el cálculo de los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuente por bombeo, mediante una solución analítica directa, la cual fue implementada para los tres casos de operación mediante la herramienta MATLAB versión R2015a.

La metodología de cálculo se aplica a dos ejemplos prácticos encontrados en la literatura, los cuales presentan limitaciones en su aplicación por un conjunto de hipótesis que asumen. Las soluciones brindadas por el método analítico propuesto, para ambos casos, son iguales a las reportadas en estos ejemplos. En ambos problemas, se calcula el tiempo de llenado de un depósito de descarga en dos sistemas de bombeo según el esquema de operación del Caso 2. El modelo analítico que se propone es una solución general para los tres casos de operación, el cual no presenta limitaciones para su utilización. Este procedimiento analítico será de gran utilidad en problemas ingenieriles específicos de operación, donde sea necesario determinar el tiempo de llenado y/o vaciado de depósitos en un sistema. En un próximo trabajo se expondrán los resultados comparativos de los modelos analíticos y discretos en la aplicación de varios ejemplos prácticos.

04 REFERENCIAS

- Arias D.** (2015). "Diseño hidráulico de los sistemas bomba-tanque-red (Bomba-Tanque de Compensación-Red de Distribución)", Trabajo de diploma, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", Cujae, La Habana, Cuba
- Ballart D.** (2018). "Determinación de los tiempos de llenado y/o vaciado de los depósitos en los sistemas fuentes por bombeo", Trabajo de diploma, Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", Cujae, La Habana, Cuba
- De Eça Guimaraes J. M., Espert V., García-Serra Jorge, Sanz F. y Cabrera Enrique** (2012). "Transitorios hidráulicos del régimen estacionario al golpe de ariete", Editorial Monografías Instituto Tecnológico del Agua, Universidad Politécnica de Valencia (UPV), 1^{ra} edición, ISBN 978-84-8363-780-7, Valencia, España.
- Fuertes V. S., Pérez R., Martínez F. J. y López P. A.** (2007). "Optimización del sistema formado por la estación de bombeo, la tubería de impulsión y el depósito de regulación", **Pimentel H., Pérez R. e Iglesias P. L.** (2016). "Abastecimento de água: o estado da arte e técnicas avançadas", pp.: 261-274, Editorial Universidade Federal da Paraíba, ISBN 978-85-7745-078-3, Paraíba, Brasil
- Gómez P. y Hernández J.** (2016). "Mecánica de los Fluidos. Problemas y soluciones", Editorial Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), ISBN 978-84-362-7109-6, Madrid, España
- Hernández J., Gómez P y Zanzi C.** (2016). "Máquinas Hidráulicas. Problemas y soluciones", Editorial Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), ISBN 978-84-362-7004-4, Madrid, España
- Martínez Y.** (2011). "Metodología para el diseño hidráulico de las estaciones de bombeo para acueducto", Tesis de doctorado, Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", Cujae, La Habana, Cuba
- Martínez Y. y Marón D. E.** (2023). "Determinación del tiempo de llenado y/o vaciado de depósitos en sistemas fuentes por bombeo", Revista Ingeniería Hidráulica y Ambiental, XLIV (4): 75-88, Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", Cujae, ISSN: 1815-591X, La Habana, Cuba

CONFLICTO DE INTERESES

Los autores declaran que no existen conflictos de intereses.

CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

Yaset Martínez Valdés

<https://orcid.org/0000-0001-9770-022X>

Participó en el diseño de la investigación y en la elaboración de las metodologías de cálculo para la determinación del tiempo de llenado y/o vaciado de los depósitos en un sistema fuente por bombeo. Colaboró en el procesamiento, análisis e interpretación de los datos. Redacción final del trabajo.

David Ernesto Marón Domínguez

<https://orcid.org/0000-0003-4198-9962>

Realizó contribuciones en el diseño de la investigación y tuvo a su cargo la creación de los algoritmos de cálculo para el software MATLAB 2015b. Participó en el análisis de los resultados del trabajo y en la revisión y redacción del manuscrito en su versión final.