

El cálculo del salto hidráulico en conductos de sección circular

INTRODUCCIÓN

Durante el diseño y la explotación de obras e instalaciones de diversos tipos, en muchas ocasiones se impone determinar de manera confiable los parámetros del salto hidráulico que se pueda formar en el interior de las mismas. A la inversa de lo que ocurre con el salto hidráulico en las conducciones de sección rectangular, que ha sido profusamente investigado, los reportes sobre las características que reviste este fenómeno en los conductos de sección circular son extremadamente escasos y no del todo convincentes. Así, las gráficas de cálculo debidas a Factórovich (1947) son innecesariamente complejas, mientras que las confeccionadas por Sotelo en fecha mucho más reciente (2002) descansan en las mismas coordenadas adimensionales empleadas por Thiruvengadam (1961) y son de uso mucho más simple, pero cuentan únicamente con contadas curvas, lo que obliga a realizar interpolaciones poco precisas. En *Diseño de Presas Pequeñas*, por otra parte, el asunto se trata sólo de forma indirecta, sin desarrollar un método explícito de cálculo. Desde otro ángulo, los estudios experimentales sobre el tema son llamativamente escasos, y a juzgar por las fuentes consultadas se limitan a tres reportes publicados, que supuestamente arrojan discrepancias con los resultados del enfoque teórico. Dada la importancia que el problema reviste para el tratamiento hidráulico correcto de muchas estructuras, estas circunstancias han motivado el análisis que se expone a continuación.

DESARROLLO

Si en un conducto de sección circular y piso horizontal se forma un salto hidráulico "completo" (en el que la superficie del agua en la sección final no alcance el techo), y si la influencia que las fuerzas de fricción ejercen sobre el mismo es despreciable, el flujo experimenta a lo largo del salto un cambio en su cantidad de movimiento que es igual a:

Resumen / Abstract

El salto hidráulico en conductos circulares ha sido poco estudiado, algunos reportes incluso consideran que los valores teóricos de sus parámetros discrepan de los contados datos experimentales existentes. Se aborda aquí el tratamiento teórico del problema exponiendo expresiones de cálculo y gráficas de solución. Se demuestra la validez de los resultados si los coeficientes que intervienen se sustentan correctamente. Para ello se reelaboran resultados de ensayos reportados en la literatura. La comparación entre fórmulas aproximadas propuestas para calcular la longitud del salto, y una dependencia empírica entre las particularidades de la hidráulica de estos conductos, demuestra la necesidad de aplicar esta última para alcanzar resultados confiables. También se determina la eficiencia del salto para consumir energía en exceso del flujo en estos conductos.

Palabras clave: salto hidráulico, tirantes conjugados, longitud del salto, consumo de energía.

The hydraulic jump in circular conduits has not been studied in depth. Some reports even consider that theoretical values of its parameters are not in agreement with the few experimental data available. Theoretical treatment of the problem is hereby presented with calculation expressions and graphics for its solution. Validity of the results is shown provided that all involved coefficients are correctly fundamented. To this end reported test results in the literature are re-elaborated. Comparison between proposed approximate formulas to calculate jump length and an empirical dependence existing within hydraulic properties of these conduits, shows the need to apply the latter in order to obtain reliable results. The paper also calculates the hydraulic jump efficiency in consumption of the excess energy in these conduits.

Keywords: hydraulic jump, conjugate depths, jump length, energy consumption.

$$\gamma \frac{Q}{g} (\beta_1 V_1 - \beta_2 V_2) = \gamma \beta'_2 z_{G2} A_2 - \gamma \beta'_1 z_{G1} A_1 \quad (1)$$

En esta ecuación Q es el gasto de circulación; V_1 y V_2 , y A_1 y A_2 , son las velocidades y las áreas en las secciones extremas del salto; z_{G1} y z_{G2} representan, en cada caso, la profundidad del centro de gravedad de la sección, medida por debajo de la superficie del agua; γ es el peso específico del agua (que aquí se ha considerado igual en ambos extremos); g es la aceleración en caída libre, β_1 y β_2 son los coeficientes de Boussinesq o de distribución del momentum en ambas secciones, asociada a la distribución de las velocidades, y los coeficientes β'_1 y β'_2 , que con justeza Chow denomina "coeficientes de fuerza" (Chow 1959, p.50), permiten tomar en cuenta la diferencia que exista entre la distribución real de las presiones en cada sección, y la distribución teórica más simple, o hidrostática. Aunque la influencia de estos coeficientes (sobre todo de los dos últimos) generalmente se omite, suponiendo *a priori* que se igualan a la unidad, más adelante se verá la importancia que su inclusión reviste para el análisis del presente caso.

Tras incorporar la ecuación de continuidad $Q=V_1A_1=V_2A_2$ y adoptar, para sencillez, que los valores de los mencionados coeficientes en las dos secciones cumplen las igualdades $\beta_2 \approx \beta_1 \approx \beta$ y $\beta'_2 \approx \beta'_1 \approx \beta'$, de modo que β y β' constituyan expresiones generalizadas de las influencias que los factores que ellos representan ejercen sobre el comportamiento del fenómeno, la ecuación (1) se puede transformar en la expresión adimensionalizada:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{8} \pi \sqrt{\frac{N_2 - N_1}{\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2}}} \quad (2)$$

en la que se han introducido dos funciones y un parámetro:

$$M = \frac{A}{A_D} ; \quad N = 2 \frac{z_G}{D} \frac{A}{A_D} = 2 \frac{z_G}{D} M ;$$

$$R = \sqrt{\frac{\beta}{\beta'}} \frac{Q}{\sqrt{g} D^{2.5}} \quad (3,4,5)$$

donde figuran el diámetro D del conducto y el área total A_D de su sección geométrica:

$$A_D = \frac{\pi D^2}{4} \quad (6)$$

Las funciones M (el valor relativo del área de la sección) y N (el valor relativo de su momento estático con respecto a la línea de la superficie) se han estructurado

de modo que sus valores se muevan entre los límites cero y uno cuando el tirante h del flujo crezca desde $h=0$ hasta $h=D$. En el primer caso esto ocurre por razones obvias, y en el segundo por el hecho de que si la sección está totalmente llena, el centro de gravedad de la sección del flujo coincidirá con el del círculo y se cumplirá que $z_G/D=1/2$, y por lo tanto que $N=1$.

Las características geométricas de las secciones que se presentan en los conductos cerrados, entre ellos los de sección circular, introducen algunas dificultades para su tratamiento analítico (Lane and Kinsvater 1938). Aún así, el esquema de la Fig.1 permite establecer que en estos últimos el área de la sección viva resulta de restar a la del sector circular de ángulo 2θ , la del triángulo que descansa sobre la línea de la superficie del flujo, por lo que se tiene:

$$A = \frac{D^2}{4} (\theta - \text{sen } \theta \cos \theta) \quad (7)$$

El ángulo θ es la mitad del ángulo central que subtiende al ancho superficial B de la sección, y varía en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ si el tirante lo hace en el rango $0 \leq h \leq D$. La relación entre dicho ángulo y el valor relativo $y=h/D$ del tirante se obtiene al notar que:

$$\cos \theta = \frac{\frac{D}{2} - h}{\frac{D}{2}} = 1 - 2y ;$$

$$\text{sen } \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = 2\sqrt{y(1-y)}$$

$$(1 \geq \cos \theta \geq -1 ; 0 \leq \text{sen } \theta \leq 1) \quad (8,9)$$

Luego, tanto el área como su valor relativo se pueden expresar directamente en función de y :

$$A = \frac{D^2}{4} \left[\text{arc cos}(1-2y) - 2\sqrt{y(1-y)}(1-2y) \right] \quad (10)$$

$$M = \frac{1}{\pi} \left[\text{arc cos}(1-2y) - 2\sqrt{y(1-y)}(1-2y) \right] \quad (11)$$

Para obtener ahora la función N hay que determinar previamente la profundidad z_G del centro de gravedad de las secciones del flujo. En las figuras planas y homogéneas esta profundidad se puede expresar sucesivamente como (Bronshstéin y Semindiáyev 1971):

$$z_G = \frac{\int_0^A z d\omega}{A} = \frac{\int_0^h b z dz}{A} \quad (12)$$

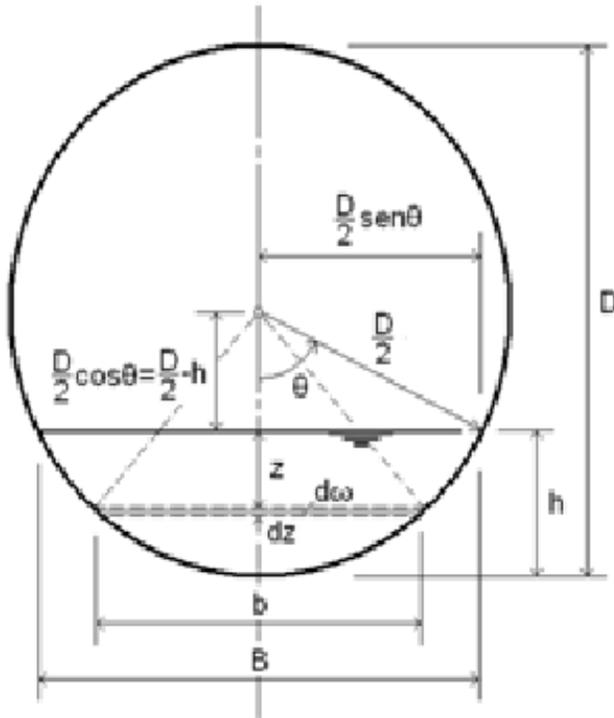


Figura 1. Geometría

donde $d\omega = b dz$ es el infinitesimal de área limitado por dos superficies horizontales separadas por un infinitesimal de profundidad dz , y b es el ancho de la superficie a la profundidad z , que está comprendida entre $z=0$ y $z=h$ (ver la figura 1). El triángulo indicado por líneas de trazos permite establecer que dicho ancho es igual a:

$$b = 2 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left[\frac{D}{2} - (h-z)\right]^2} = 2 \sqrt{(h-z)(D-h+z)} = 2D \sqrt{\left(y - \frac{z}{D}\right)\left(1 - y + \frac{z}{D}\right)} \quad (13)$$

y además, haciendo $z=0$, que el ancho completo B de la sección del flujo se expresa como:

$$B = 2 \sqrt{h(D-h)} = 2D \sqrt{y(1-y)} \quad (14)$$

Sustituyendo entonces (13) en (12) y adimensionalizando la expresión, se llega a una integral que resuelta (Dwight 1961, Allen 1964), conduce a:

$$\frac{z_G}{D} = \frac{D^2}{24A} \left\{ 2 \sqrt{y(1-y)} [3 - 4y(1-y)] - 3(1-2y) \left[\frac{\pi}{2} - \arcsen(1-2y) \right] \right\} \quad (15)$$

donde el ángulo definido por la función $\arcsen(1-2y)$ varía entre $\pi/2$ y $-\pi/2$ si el valor relativo del tirante lo hace entre $y=0$ y $y=1$. De aquí se desprenden dos casos particulares de interés, a saber:

llenado parcial hasta la mitad:

$$y = \frac{1}{2} ; A = \frac{\pi D^2}{8} ; \frac{z_G}{D} = \frac{D^2}{24A} (2) = \frac{2}{3\pi} = 0,212 \quad (16)$$

y llenado total de la sección:

$$y = 1 ; A = \frac{\pi D^2}{4} ; \frac{z_G}{D} = \frac{D^2}{24A} (3\pi) = \frac{1}{2} = 0,5 \quad (17)$$

Transformando ahora este resultado, la expresión (4) para N se obtiene en la forma:

$$N = \frac{1}{3\pi} \left\{ 2 \sqrt{y(1-y)} [3 - 4y(1-y)] - 3(1-2y) \left[\frac{\pi}{2} - \arcsen(1-2y) \right] \right\} \quad (18)$$

y al igual que M , se expresa directamente en función del valor relativo del tirante y toma valores comprendidos entre cero y uno.

La gráfica de la Fig.2 muestra cómo varían las funciones M , z_G/D y N , así como el cociente $k_G = z_G/h$, que resulta de interés en algunas aplicaciones al expresar sobre qué parte del tirante h se extiende la profundidad z_G , y que varía entre $k_G=2/5$ en $y=0$ y $k_G=1/2$ en $y=1$.

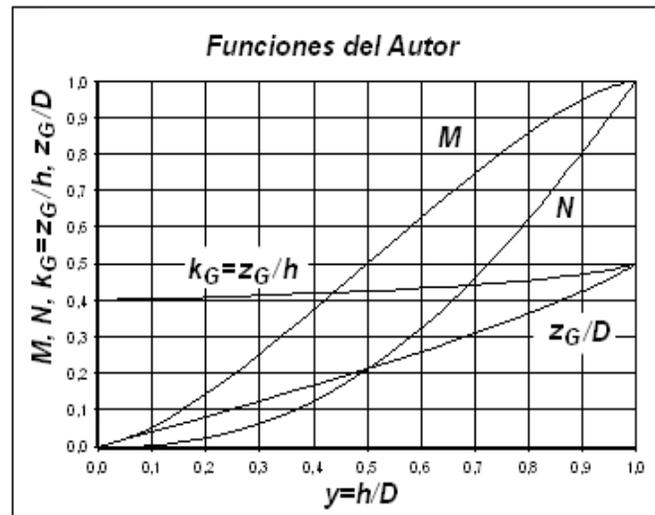


Figura 2. Funciones del autor

La estructura de la ecuación (2) y de las expresiones (11) y (18) para las funciones M y N impide que con ellas se pueda determinar directamente el tirante conjugado. No obstante, la gráfica de la Fig.3 se ha confeccionado asignando valores relativos particulares $y_1=h_1/D=0 \div 1$ al tirante inicial y dando valores a su conjugado $y_2=h_2/D=0 \div 1$, para establecer en (2) los valores correspondientes de R y tomarlos como abscisas para trazar la familia $y_2=f(R, y_1)$. Si se conocen el diámetro D , el gasto Q y el tirante inicial del salto h_1 , y se adoptan los valores apropiados para los coeficientes β y β' , esta familia conduce de forma expedita y rápida al valor buscado del tirante h_2 .

Así por ejemplo, si a un conducto de sección circular y diámetro $D=2,00$ m ingresa un gasto $Q=4,70$ m³/s con un tirante $h_1=0,60$ m, y se suponen coeficientes con valores $\beta = 1,10$ y $\beta' = 1$, de (5) se obtendrá $R=0,278$ y la curva $y_1=h_1/D=0,60/2,00=0,30$ conducirá a determinar en el eje vertical, como se indica en la gráfica con un pequeño cuadrado, el valor $y_2=0,90$, y por lo tanto al tirante final del salto $h_2=2,00*0,90=1,80$ m. A la inversa, si se conoce este tirante final $h_2=1,80$ m, y por lo tanto su valor relativo $y_2=h_2/D=1,80/2,00=0,90$, la intersección de este último con la recta vertical $R=0,278$ tendrá lugar sobre la curva $y_1=0,30$, de modo que el salto se iniciará con un tirante igual a $h_1=2,00*0,30=0,60$ m.

La esencia misma del fenómeno restringe su formación a los casos en que se cumpla la condición $h_2 \geq h_1$. Entonces, como el caso particular $h_2=h_1$ responde al establecimiento del valor crítico:

$$Fr_1 = \frac{\beta Q^2 B_1}{\beta' g A_1^3} = 1 \quad (19)$$

del número de Froude en la sección inicial del salto, esto significa que en esas condiciones, según la expresión (2), el parámetro R deberá ser igual, sucesivamente, a:

$$R = \sqrt{\frac{\beta}{\beta'}} \frac{Q}{\sqrt{g} D^{2,5}} = \sqrt{\frac{A_1^3}{D^5 B_1}} = \frac{\pi^{1,5}}{8} \sqrt{\frac{M_1^3}{B_1/D}} = \frac{\sqrt{2} \pi^{1,5}}{16} \frac{M_1^{1,5}}{[y_1(1-y_1)]^{0,25}} = \frac{\sqrt{2} \pi^{1,5}}{16} \frac{M_2^{1,5}}{[y_2(1-y_2)]^{0,25}} \quad (20)$$

Dando entonces valores a y_2 , y determinando con esta expresión los correspondientes valores de R , esta curva se ha superpuesto a la familia anterior con una línea gruesa y delimita por debajo la Zona 1 en que la gráfica res-

ponde a la deducción conducida anteriormente. Dicha zona se extiende entre esta última curva, el eje de ordenadas (donde $y_1=h_1/D=0$) y la recta horizontal $y_2=h_2/D=1$, que marca la situación en que con el tirante conjugado h_2 la superficie del agua ha alcanzado el techo del conducto. Más allá de este punto ya no se estará en presencia del salto completo para el cual se han venido realizando las deducciones anteriores.

Aún cuando esta Zona 1 sea la más relevante para la realización de los cálculos habituales, no es la única que en la gráfica posee sentido físico. En efecto, la estructura de la ecuación (2) es totalmente simétrica, y ello significa que si se deseara construir ahora otra familia de curvas que permitiera conocer, dado un valor R del gasto relativo, cuál será el valor relativo y_1 del tirante inicial que se formará al imponer un valor relativo y_2 del tirante final (es decir, resolver el problema inverso que se abordó en la segunda parte del ejemplo numérico anterior), bastaría asignar a este último una serie de valores (uno para cada curva de dicha familia) y hacer variar a y_1 para determinar los correspondientes valores de R y confeccionar la gráfica en cuestión. Esto fue precisamente lo que se hizo antes, pero intercambiando los papeles, y por ello la familia buscada sería precisamente la que en la gráfica corresponde a la Zona 2 que aparece limitada por la curva izquierda $y=idem$ y por la curva derecha $y=1$. Para emplear esta zona, basta identificar la curva con el valor dado de y_2 , determinar su intersección con el valor de R , proyectar esa intersección sobre el eje vertical y leer sobre el mismo el valor buscado de y_1 . Así, con los mismos datos del ejemplo anterior, en que el tirante conocido de salida era $h_2=1,80$ m, la curva correspondiente a su valor relativo $y_2=1,80/2,00=0,90$ se intersecará con la vertical $R=0,278$ en el punto de ordenada $y_1=0,30$ (ver el cuadrado inferior en la Zona 2), por lo que el tirante inicial buscado será de $h_1=2,00*0,30=0,60$ m. Los trazos que enlazan a los dos cuadrados del ejemplo ilustran la vinculación que existe entre los pares de valores formados por los puntos de ambas zonas que corresponden a un mismo valor del argumento R , lo que se deriva de la propiedad más sobresaliente de los saltos hidráulicos y constituye un interesante e inédito atributo de la presente representación gráfica (véanse en Henderson (1966) y antes en Advani (1962), otros posibles enfoques para el cálculo de los saltos hidráulicos).

De vuelta a la curva $y=idem$ ($Fr=1$) que divide a ambas zonas de la gráfica, el tirante donde se produce ese valor notable del número de Froude es por definición el tirante crítico, de modo que la mencionada curva expresa simplemente la variación de su valor relativo $y_{CR}=h_{CR}/D$ con el parámetro R y presenta el peculiar comportamiento asintótico que caracteriza a estas dependencias en los conductos abovedados (Chow 1959, pp.64-66; Sliscki 1979, pp.111-112). El valor $R=0,278$ del ejemplo determi-

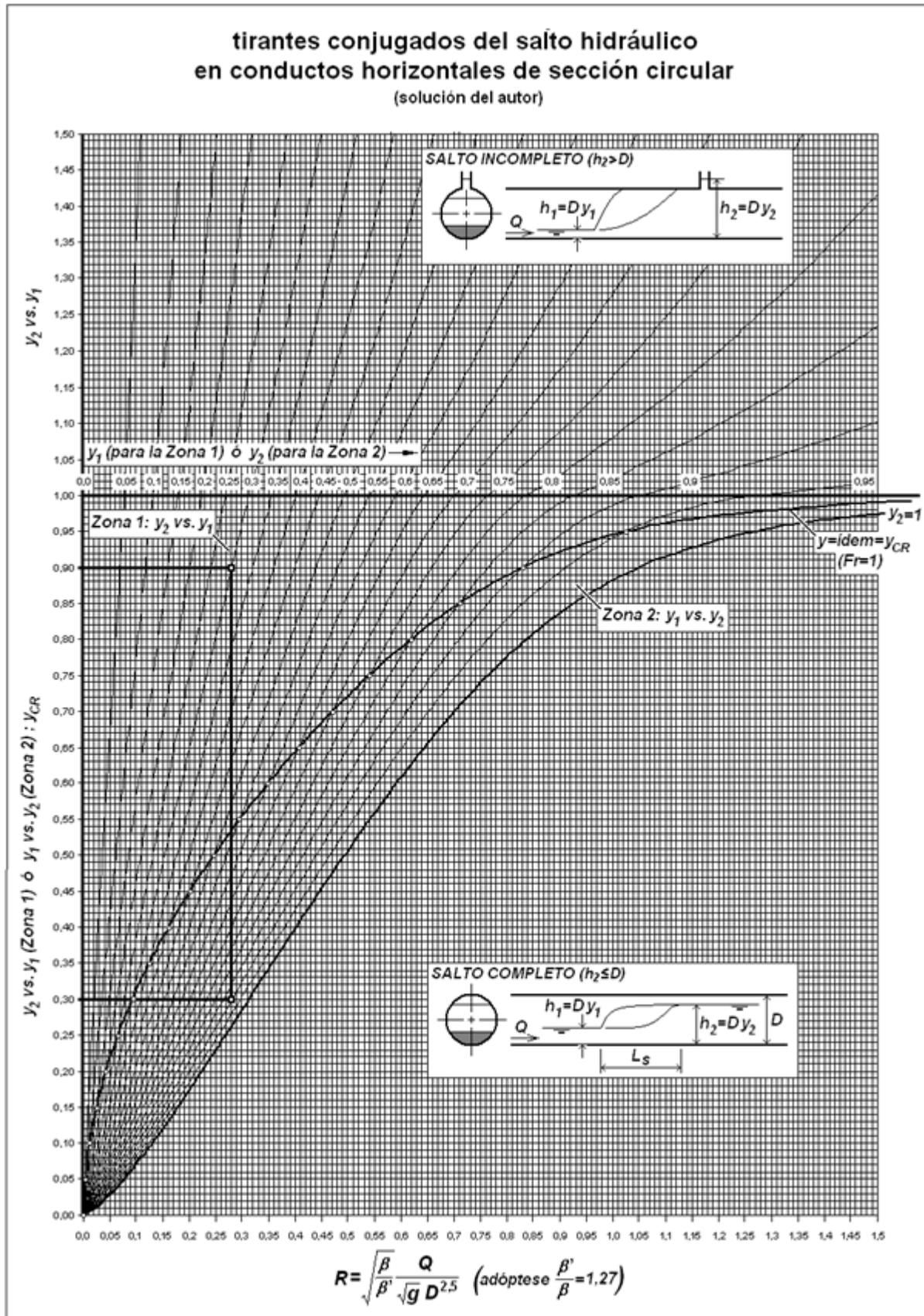


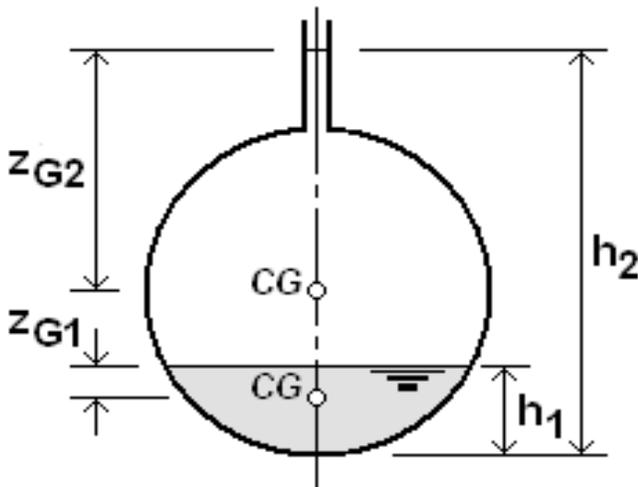
Figura 3. Tirantes conjugados

na en el eje vertical un valor relativo $y_{CF}=0,533$, por lo que en este caso el valor absoluto del tirante crítico es igual a $h_{CF}=2,00 \cdot 0,533=1,07$ m.

Si en un conducto de sección circular se establece la desigualdad $h_2 > D$, es decir, si la segunda conjugada del salto no queda albergada dentro del conducto, se estará en presencia del denominado salto "incompleto". En este caso la ecuación (1) resulta también válida (Kiseliyov, p.144), siempre que en ella el área viva A_2 al final del salto se sustituya por el área total de la sección A_D , y la profundidad z_{G2} del centro de gravedad de esa sección se exprese como:

$$z_{G2} = h_2 - \frac{D}{2} \quad (21)$$

Esta última expresión se desprende de considerar, como se esquematiza en la Fig.4, que si después del salto el techo del conducto circular se conecta con un tubo vertical estrecho abierto a la atmósfera, que haga las veces de piezómetro, en dicho tubo el agua se elevará hasta el nivel correspondiente a la segunda conjugada h_2 , al tiempo que la profundidad z_{G2} se medirá entre dicho nivel y el centro geométrico del conducto circular, toda vez que la contribución de la sección correspondiente a la columna de agua en el tubo ejercerá una influencia despreciable en el momento estático y por lo tanto en la localización del centro de gravedad.



parámetros en el salto incompleto

Figura 4. Salto incompleto

Con estas consideraciones, y sustituyendo $V_1=Q/A_1$ y $V_2=Q/A_D$, la ecuación (1) queda como sigue:

$$\frac{\beta_1 Q^2}{g A_1} - \frac{\beta_2 Q^2}{g A_D} = \beta_2' \left(h_2 - \frac{D}{2} \right) A_D - \beta_1' z_{G1} A_1 \quad (22)$$

En este caso se puede despejar el valor de h_2 y, de nuevo con $\beta_2 \approx \beta_1 \approx \beta$ y $\beta_2' \approx \beta_1' \approx \beta'$, adimensionalizar como antes el resultado con la ayuda de las expresiones (3), (4) y (5). Esto permitirá alcanzar una dependencia con la que el tirante relativo $y_2=h_2/D$ se podrá determinar directamente en función del parámetro R y de los valores de M_1 y N_1 correspondientes a la sección inicial del salto:

$$y_2 = 1 + \frac{1 - M_1}{M_1} \left(\frac{4R}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} (1 - N_1) \quad (23)$$

Esta última dependencia se ha empleado para adiccionar a la gráfica de la Fig.3 su parte superior, que se ha extendido hasta un valor relativo tan alto como $y_2=1,5$. Contando con estos resultados se podrá calcular el tirante h_2 y por lo tanto la diferencia h_2-D , para establecer cuál será la presión que se ejercerá sobre el techo del conducto en este punto del mismo.

Como se adelantó al inicio, los estudios experimentales del salto hidráulico en los conductos circulares son muy escasos. Según fuentes autorizadas (Sotelo 2002) se han realizado únicamente tres investigaciones de este tipo destinadas a determinar las relaciones entre los tirantes extremos del salto en estos cauces: los realizados por Silvester en 1965 y por Kunstatsky & Vybora en 1966, con secciones circulares, y el que llevó a cabo Hager con secciones en U (cercanas a las anteriores) en una investigación que data de 1989.

Las mediciones de laboratorio de Kunstatsky & Vybora, que en criterio de Sotelo (pp.309, 311-313) fueron las más completas de las dos primeras, parecieron respaldar observaciones que habían sido adelantadas por Silvester en el sentido de que los tirantes conjugados reales eran algo menores que los que arrojaba el análisis teórico, y esto recibió una supuesta confirmación adicional con los experimentos de Hager.

En la gráfica izquierda de la Fig.5 se han trazado con líneas gruesas las tres curvas que Kunstatsky & Vybora obtuvieron en ensayos con valores relativos iniciales $y_1=0,2, 0,3$ y $0,4$. Al mismo tiempo, tomando en cuenta que con tirantes menores o iguales que la mitad del diámetro D del semicírculo inferior de la sección, los conductos con cauces en U deben comportarse exactamente igual que los cauces circulares, a la gráfica se han incorporado también los diez puntos experimentales medidos por Hager con valores $y_1=0,10, 0,13$ y $0,175$ que satisficieron esta condición, es decir, en los que el conjugado y_2 no llegó a ser mayor de 0,5 y el salto quedó confinado al semicírculo inferior de la sección. Por no cumplir con

dicho requisito se han excluido de esta gráfica otros trece puntos correspondientes a esos mismos tres valores relativos del tirante inicial, aunque con conjugados mayores que 0,5, así como otros siete ensayos que se llevaron a cabo con valores de y_1 iguales a 0,25 y 0,45, pero en los cuales siempre se manifestó esa misma situación. La comparación entre los datos experimentales de Kunstatsky & Vyborá y de Hager, y las curvas teóricas correspondientes, que en la gráfica se indican con líneas finas, manifiestan en efecto una aparente discrepancia, que Hager atribuyó al hecho de haber omitido del planteamiento teórico la influencia de la fricción.

Aunque las fuerzas de fricción ciertamente contribuyen a que los saltos queden controlados por tirantes finales algo menores, las investigaciones realizadas por muchos autores han demostrado fehacientemente que la influencia de este factor en el comportamiento de los saltos hidráulicos es realmente muy pequeño, y casi siempre despreciable, por lo que al contrario de lo que opina Hager, la omisión del mismo en la ecuación (1) no puede explicar la discrepancia detectada.

En opinión del autor de la presente contribución, la explicación más razonable radica en el comportamiento especialmente irregular y marcadamente tridimensional que manifiestan los saltos hidráulicos en los cauces que presentan estas configuraciones. En efecto, cuando el salto se forma y los tirantes crecen rápidamente a lo largo del mismo, las líneas de corriente divergen intensamente, ascendiendo por las paredes curvas que confinan al flujo y reorientándose en planta cuando se aproximan a su superficie, para formar incluso peculiares sobre-elevaciones que se distinguen a los costados del flujo principal y que se atenúan y llegan a desaparecer sólo después de un tramo que se extiende más allá del final del salto. En estas circunstancias no se puede esperar que las distribuciones de las velocidades y de las presiones, tanto en las verticales como en las secciones en su conjunto, sean tan uniformes o regulares que permitan adoptar para el análisis, como se hace por ejemplo en los cauces rectangulares, valores cercanos a uno de los coeficientes de Boussinesq β y de los coeficientes de fuerza β' que figuran en el planteamiento teórico representado por la ecuación (1). Más aún, este carácter curvilíneo y divergente de las líneas de corriente permite asegurar que al igual que ocurre en los flujos que se mueven por perfiles cóncavos, los coeficientes β' , que toman en cuenta la distorsión y falta de uniformidad en la distribución de las presiones y su alejamiento de la simple ley hidrostática que caracteriza a los flujos con líneas de corriente paralelas, deberán caracterizarse por valores mayores que la unidad, como se explica claramente por Chow (p.31).

Las gráficas de la Fig.5 confirman esta apreciación del problema. En efecto, como se indica en la de la izquierda, tanto Kunstatsky & Vybora como Hager tomaron el valor experimental del parámetro R en la forma más simple:

$$R = \frac{Q}{\sqrt{g} D^{2,5}} \quad (24)$$

que se desprende de suponer en la ecuación (1), según la práctica habitual, coeficientes de distribución $\beta = 1$ y $\beta' = 1$. A la gráfica de la derecha, por el contrario, esos mismos datos se han llevado con abscisas experimentales R en las que para el cociente entre ambos coeficientes se ha adoptado el valor $\beta' / \beta = 1,27$, único para todos los casos. Como se observa, con esta simple y justificada precisión la familia de curvas teóricas manifiesta una gran coincidencia con las mediciones realizadas por estos autores.

Se concluye por lo tanto que el enfoque teórico (del cual los mencionados coeficientes constituyen una parte integrante) sí es capaz de producir resultados totalmente acordes con la realidad, y que para garantizar esta concordancia basta con adoptar en la expresión completa (5) para el parámetro R , que sirve de argumento a la función $y_2 = f(R, y_1)$, el cociente $\beta' / \beta = 1,27$ en calidad de complemento experimental. Esta conclusión acompaña al rótulo del eje de las abscisas en la gráfica de la Fig.3.

La consecuencia práctica de esta circunstancia se puede ilustrar con el mismo ejemplo anterior, en el que tomando en cuenta las consideraciones ya expuestas sobre el carácter peculiar de los flujos que aquí se tratan se había considerado *ex profeso* para el coeficiente de Boussinesq un valor $\beta = 1,10$, algo elevado para las conducciones artificiales (Chow, p.28), pero donde al mismo tiempo, sin embargo, se consideró simplemente (como es usual) que $\beta' = 1$. A la luz de los resultados que se acaban de obtener, hay que considerar que con independencia del valor que realmente caracterice a β , el coeficiente de fuerza β' será tal, que entre ambos tendrá lugar el cociente $\beta' / \beta = 1,27$. Esto provoca entonces para el parámetro R un valor $R = 0,235$, inferior al de 0,278 del ejemplo original, y en consecuencia, que la gráfica de la Fig.3 conduzca, con $y_1 = h_1/D = 0,60/2,00 = 0,30$, a $y_2 = 0,76$, y con ello a $h_2 = 2,00 * 0,76 = 1,52$ m, un conjugado que es 16% menor que el de 1,80 m que se determinó anteriormente. De modo similar, el valor relativo del tirante crítico se reducirá ahora a $y_{CR} = 0,485$ y su valor absoluto a $h_{CR} = 2,00 * 0,485 = 0,97$ m, 9% inferior al de 1,07 m anterior. Estas correcciones, por supuesto, conllevan importantes consecuencias prácticas para el control del salto, para la determinación de la forma (libre o sumergida) en que un flujo emergerá por debajo de una compuerta, etc.

Para determinar ahora la longitud del salto completo en los conductos de sección circular, Sotelo recomienda (pp.322-323) extender a ellos la sencilla fórmula empírica obtenida por Hager para los conductos con sección en U (Hager 1989):

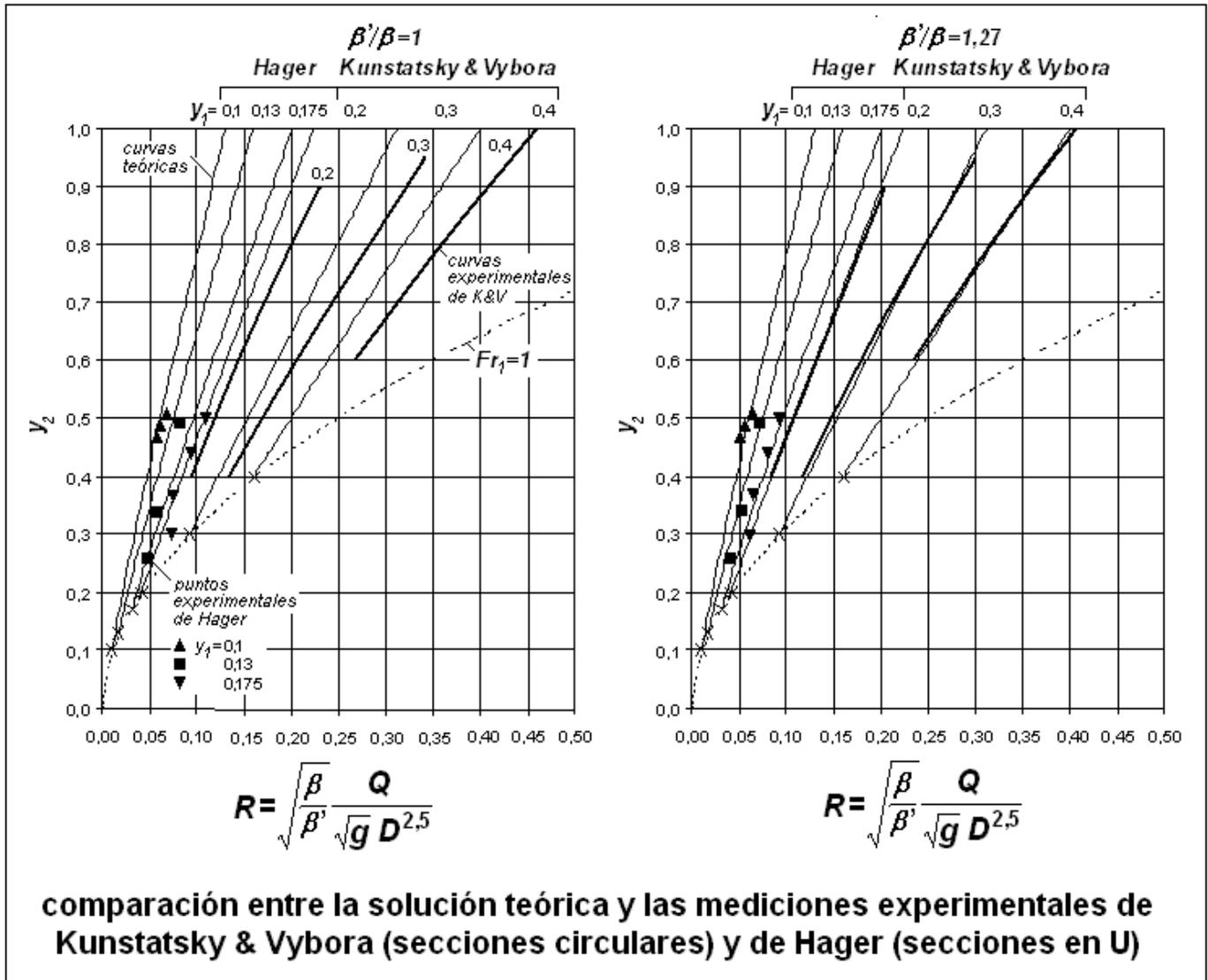


Figura 5. Comparaciones

$$L_s = 6h_2 \quad (25)$$

que según dicho autor es válida en el rango $Fr_1=4-91$ del número de Froude en la entrada al salto. El propio Hager, sin embargo, advirtió que su expresión era sólo aproximada debido a las fuertes turbulencias que se observaron durante los experimentos y a la consecuente dispersión de los valores medidos, así como al hecho de que la fórmula no reflejaba la influencia que en este parámetro del salto debía ejercer el valor de su tirante inicial.

Hay que coincidir con Hager en que esto último constituye sin duda una insuficiencia de peso, de la que está exenta sin embargo la fórmula, también experimental, que Kalfa desarrolló en Kiev, Ucrania, en 1967:

$$L_s = 6 \frac{A_2 - A_1}{B_1} \quad (26)$$

Como se observa, en esta otra expresión, que se inscribe también entre los contados reportes de experimentos con saltos en conductos circulares y que por lo visto permaneció desconocida para los países occidentales, la influencia de las condiciones de entrada se manifiesta explícitamente en los valores del área A_1 y del ancho B_1 de la superficie de dicha sección inicial.

Salta a la vista que la fórmula de Hager reproduce exactamente la conocida expresión que Rajaratnam propuso con carácter aproximado para la longitud del salto en los cauces de sección rectangular con $Fr_1=16-256$, y que después fuera asimilada por el USBR para los saltos fuertes y estables, y por Kawagoshi en un rango algo más reducido $Fr_1=16-144$ del número de Froude. Por otra parte, la fórmula de Kalfa coincide significativamente con la que Smetana había publicado varios años antes (Smetana 1931) para los canales de sección rectangular. En efecto,

si como es propio de estos últimos cauces, en (26) se hace $B=b$ y $A=bh$ (donde b es el plato de la sección), se llega de inmediato a la no menos difundida fórmula de Smetana:

$$L_s = 6(h_2 - h_1) \quad (27)$$

Dada la considerable simplificación que supondría el empleo de la fórmula de Hager o el de la fórmula de Smetana, en sustitución de la expresión "completa" de Kalfa, resulta de interés valorar las consecuencias de dicha simplificación.

Ante todo, por congruencia con el tratamiento anterior, conviene llevar la dependencia de Kalfa a una forma adimensional, que con las expresiones expuestas anteriormente resulta igual a:

$$\frac{L_s}{D} = \frac{3\pi}{2} \frac{M_2 - M_1}{\frac{B_1}{D}} = \frac{3\pi}{4} \frac{M_2 - M_1}{\sqrt{y_1(1-y_1)}} \quad (28)$$

donde M_1 y M_2 responden a la función (11). La gráfica de la Fig.6 se ha confeccionado con esta última expresión y permite, conocidos el diámetro D y el tirante h_1 , y luego de calcular el conjugado h_2 como se estableció antes, determinar rápidamente la longitud L_S del salto.

Si sobre esta familia de curvas se lleva la recta *única* representada por la fórmula que Hager propuso con carácter aproximado (lo que se ha hecho con una línea de trazos), se evidencia de inmediato que su empleo provocará grandes imprecisiones en la determinación de la longitud del salto. Así, si el valor relativo del tirante inicial es mayor que $y_1=0,16$ la longitud que arroje el empleo de dicha fórmula será siempre mayor que la real, mientras que en los restantes casos la diferencia entre ambos resultados dependerá del valor relativo y_2 que tenga el tirante conjugado.

En cuanto al empleo de la expresión de Smetana como otra alternativa para facilitar un cálculo más sencillo, si su expresión adimensional:

$$\frac{L_s}{D} = 6 \left(\frac{h_2}{D} - \frac{h_1}{D} \right) = 6(y_2 - y_1) \quad (29)$$

se llevará también a la gráfica de la Fig.6 (lo que no se ha hecho aquí para no recargar esta última), determinaría, como se confirma fácilmente, una familia de rectas paralelas entre sí (y paralelas a la recta de Hager) que se iniciarían sobre el eje de las abscisas en los puntos donde se cumpla que $y_2=y_1$ (y $L_S/D=0$) y concluirían en la vertical final (donde $y_2=1$) con longitudes relativas máximas iguales a $L_S/D=6(1-y_1)$. Al comparar estos últimos valores con los que arrojan las curvas de Kalfa para esa situación extrema, se comprobará que con valores relativos del tirante inicial inferiores a $y_1=0,24$, aproximada-

mente, el empleo de la fórmula de Smetana producirá siempre longitudes menores que las reales, y por el contrario, que en los saltos que se inicien con valores relativos mayores que $y_1=0,5$ las longitudes que se calculen de este modo serán siempre excesivas. Por último, con valores comprendidos entre $y_1=0,24$ y $y_1=0,5$ la diferencia entre los resultados dependerá del valor relativo y_2 del tirante final. Hay que señalar, no obstante, que esta segunda simplificación se comporta algo mejor que la representada por la fórmula de Hager, ya que en el rango de valores relativos de los tirantes iniciales comprendidos entre $y_1=0,2$ y $y_1=0,5$, que es bastante frecuente, la imprecisión que se cometerá no será superior a 20% (por defecto o por exceso, según el caso).

De todos modos, hay que convenir en que la adopción de cualquiera de estas dos simplificaciones, aunque atractiva, es desaconsejable, no sólo por las imprecisiones que acarrearán, sino porque aún en la mejor de ellas, al utilizar la segunda como herramienta de cálculo, se estará desconociendo el hecho esencial de que el flujo en los conductos de forma circular que aquí se analizan se aleja sustancialmente del que tiene lugar en los de sección rectangular, donde casi siempre se produce un flujo "plano" o muy cercano al mismo, que prácticamente no resulta influenciado por la presencia de las paredes. Evidentemente, fue un claro concepto de esta realidad lo que llevó a Kalfa a abandonar caminos más trillados y a introducir en su fórmula de cálculo (26) los parámetros A y B con que se debe abordar el tratamiento correcto de los flujos en los cauces de sección circular.

El empleo de la gráfica de la Fig.6 se explica por sí solo, y con los resultados $y_1=0,60/2,00=0,30$ y $y_2=1,52/2,00=0,76$ del ejemplo anterior (después de haber introducido la precisión $\beta' / \beta = 1,27$), conduce a una longitud relativa $L_S/D=2,9$, y de aquí a $L_S=2,00 \cdot 2,9=5,8$ m (la fórmula de Hager arrojaría una longitud mucho mayor, de 9,1 m, y la de Smetana un valor igual a 5,5 m, que en este caso específico es mucho más cercano al real).

Por último, la parte de energía mecánica que se consume para la formación del salto hidráulico en los conductos de sección circular se puede establecer, como es usual, en la forma:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \left(\alpha'_1 h_1 + \frac{\alpha_1 Q^2}{2g A_1^2} \right) - \left(\alpha'_2 h_2 + \frac{\alpha_2 Q^2}{2g A_2^2} \right) \quad (30)$$

donde E_1 y E_2 representan la energía total del flujo en la sección inicial del salto y en su sección final, respectivamente. Los coeficientes α y α' (el primero, el coeficiente de Coriolis) juegan los mismos roles que los coeficientes β y β' en la ecuación (1) de cantidad

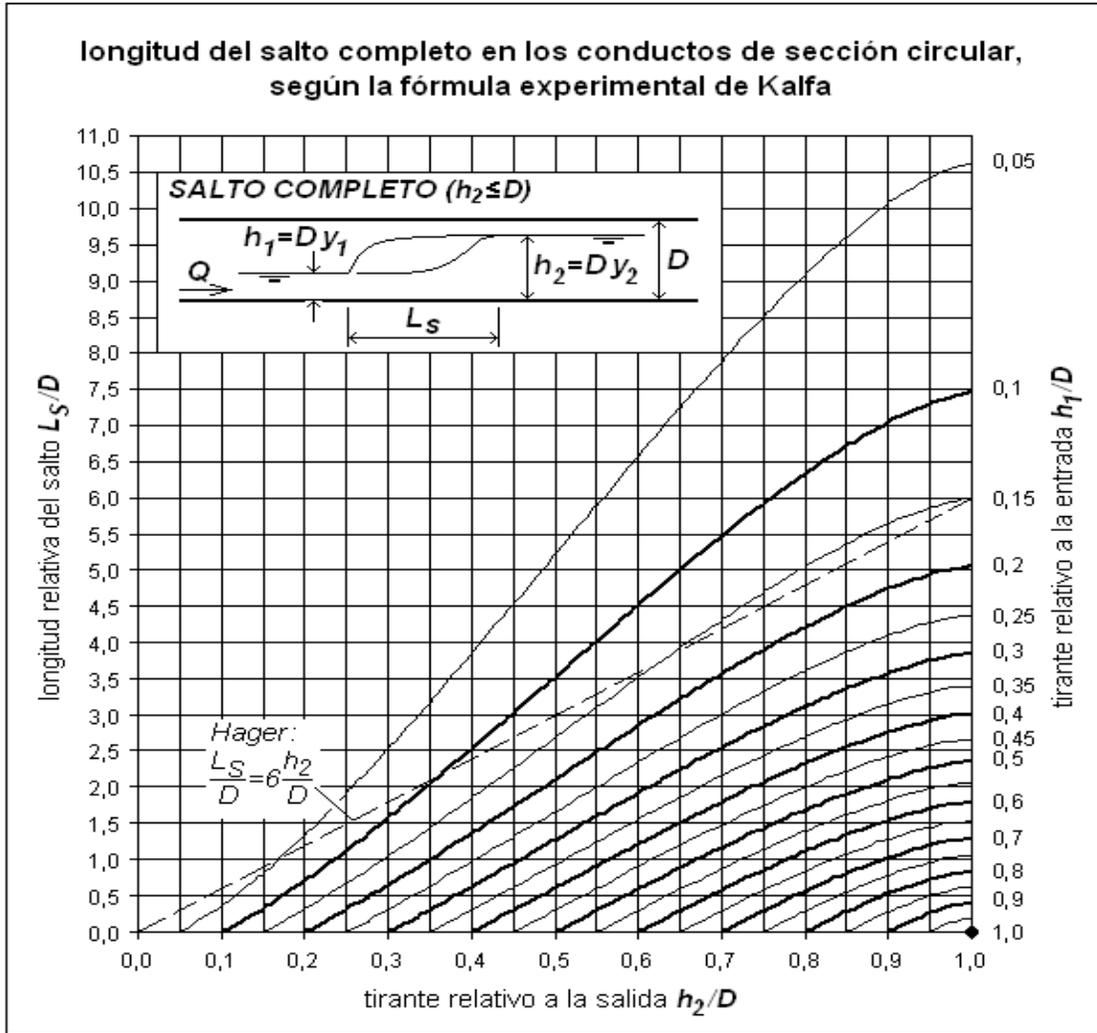


Figura 6. Salto completo

de movimiento, al expresar las influencias que ejercen las distribuciones no uniformes de las velocidades y de las presiones en el seno del fluido, y por similitud con el tratamiento anterior se considerará que cumplen las condiciones $\alpha_2 \approx \alpha_1 \approx \alpha$ y $\alpha'_2 \approx \alpha'_1 \approx \alpha'$. Como es conocido, el sentido físico de estos cuatro coeficientes condiciona que entre ellos se establezcan las desigualdades $\alpha \geq \beta$ y $\alpha' \geq \beta'$ (Jaeger, 1956), a las que aquí se incorporará la proporción:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} \quad (31)$$

que no contradice en ninguna medida lo expuesto anteriormente. Ello permite emplear entonces los resultados obtenidos anteriormente para expresar el valor relativo $\Delta E/E_1$ del consumo de energía, referido a la energía inicial, en la forma:

$$\frac{\Delta E}{E_1} = 1 - \frac{E_2}{E_1} = 1 - \frac{y_2 + \frac{8R^2}{\pi^2 M_2^2}}{y_1 + \frac{8R^2}{\pi^2 M_1^2}} \quad (32)$$

donde como se comprueba fácilmente, R conserva su expresión completa original, dada por (5).

La gráfica de la Fig.7 se ha confeccionado con esta dependencia, sustituyendo en ella el parámetro R por la expresión (2) (y en los saltos incompletos, haciendo $M_2=1$ y empleando la expresión (23) para determinar y_2). Como cabía esperar, en los saltos que se produzcan con valores relativos y_2 y y_1 cercanos entre sí (que pertenecerán a la categoría de saltos débiles u oscilantes) se tendrá $\Delta E/E_1 \rightarrow 0$, es decir, el consumo relativo de energía será poco apreciable. Por el contrario, si el valor relativo del tirante inicial es muy pequeño, el cociente $\Delta E/E_1$,

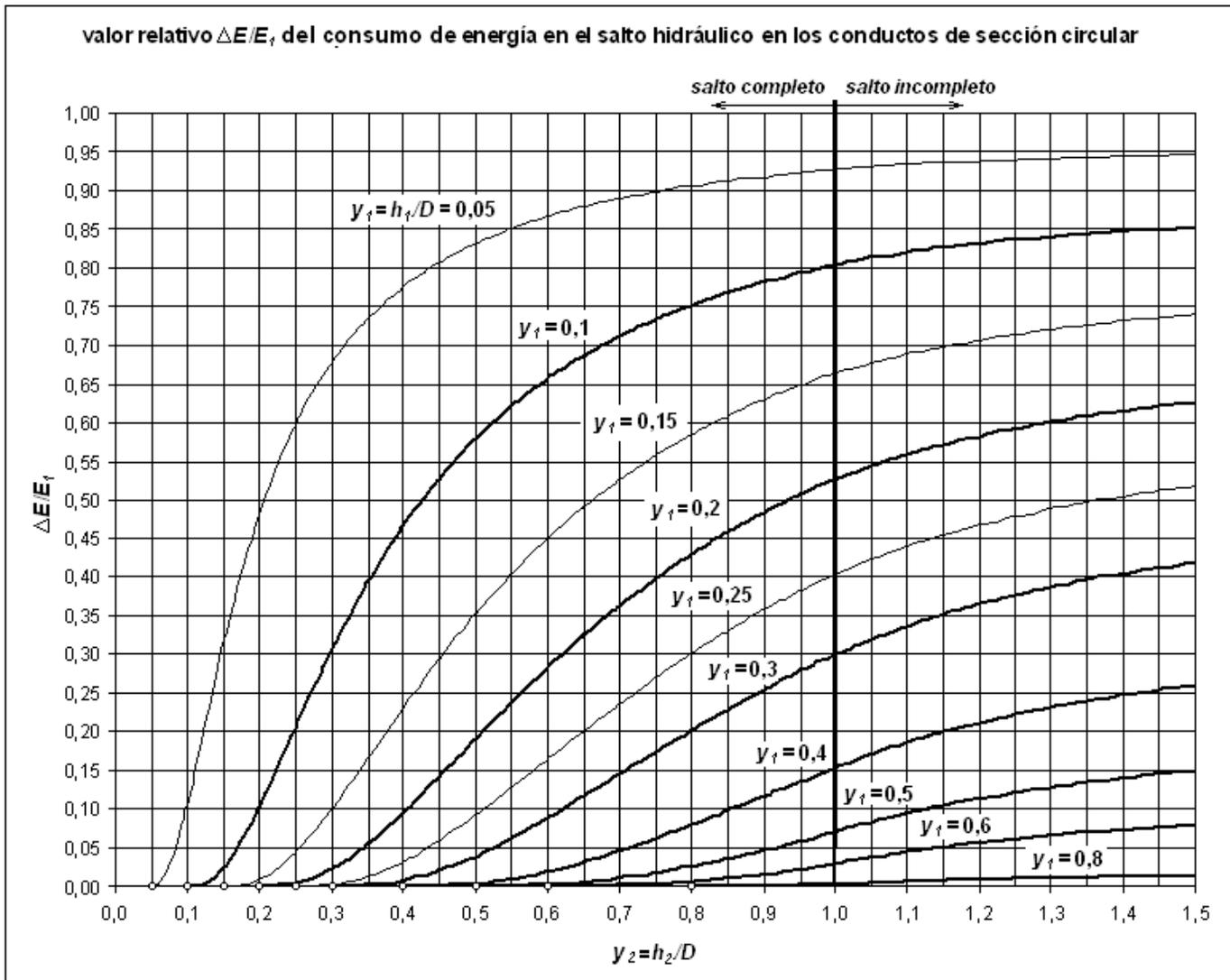


Figura 7. Consumo de energía

que constituye también una medida de la eficiencia del salto, crecerá rápidamente, y la parte ΔE de energía empleada para la formación del mismo se acercará cada vez más a la energía total de entrada E_1 , en la medida en que el tirante de salida crezca con respecto al inicial.

Para ilustrar el empleo de la gráfica, con los datos del ejemplo numérico que se resolvió anteriormente, en el que $D=2,00$ m, $Q=4,70$ m³/s y $h_1=0,60$ m, y luego de determinar el conjugado $h_2=1,52$ m, se tiene, con los valores relativos $y_1=0,60/2,00=0,30$ y $y_2=1,52/2,00=0,76$, un consumo relativo $\Delta E/E_1=0,18$. (Con esta misma relación $h_2/h_1=1,52/0,60=2,53$ de tirantes conjugados, el salto en un conducto de sección rectangular provocará un consumo relativo $\Delta E/E_1=0,11$, 39% menor, ver Chow, 1959, pp.396-398).

Ya que la expresión para la energía total en la sección de entrada al salto se puede escribir también en la forma:

$$E_1 = \alpha'_1 h_1 + \frac{\alpha_1 Q^2}{2g A_1^2} = \alpha_1 \left(\frac{\alpha'_1}{\alpha_1} h_1 + \frac{Q^2}{2g A_1^2} \right) \quad (33)$$

y la proporción (31) implica que $\alpha'_1/\alpha_1=1,27$, luego de determinar el área relativa como $M_1=0,252$ y el área como $A_1=0,252 \cdot \pi \cdot 2,00^2/4=0,792$ m², si se mantiene para β_1 el valor $\beta=1,10$ que se supuso desde el mismo inicio y para estimar el valor del coeficiente de Coriolis en la sección inicial se acepta en calidad de primera aproximación la correspondencia:

$$\alpha = 1 + 3(\beta - 1) \quad (34)$$

que se desprende de las deducciones hechas por Rehbock con una distribución lineal de velocidades en la vertical (Chow, p.29, nota 1 al pie), se llega a $\alpha_1 = 1,30$ y a una energía inicial total $E_1=3,32$ m. De este modo, en el salto se consumirá en este caso una energía igual a $\Delta E=0,18 \cdot 3,32=0,60$ m y el cálculo del mismo quedará resuelto en sus aspectos esenciales.

CONCLUSIONES

Se considera que los resultados obtenidos, en particular las gráficas contenidas en las Fig.3, 6 y 7 para la determinación de los tirantes conjugados, de la longitud del salto y del consumo de energía en el mismo, respectivamente, pueden ser empleados de forma confiable en los cálculos prácticos que se lleven a cabo para el diseño, la operación o la calibración de las obras hidráulicas que presenten conductos con las características que aquí se han analizado.

REFERENCIAS

- Advani, R. (1962) *A New Method for Hydraulic Jump in Circular Channels*, Water Power, vol.14, September, p.349.
- Allen, E. (1964) *Tablas Matemáticas con Seis Decimales*, Editora del Consejo Nacional de Universidades, La Habana, pp.190-191.
- Bronshtéin, I, y K. Semendiáyev (1971) *Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes*, Mir, Moscú, p.490.
- Chow, V. (1959) *Open-channel hydraulics*, Edición Revolucionaria, Instituto del Libro, La Habana, pp.27-34, 49-59.
- Dwight, H. (1961) *Tablas de integrales y otros datos matemáticos*, Naúka, Moscú (1973), p.68.
- Factórovich, V. (1947) Reportes del VNIIG, tomo 32. En: Kiseliiov, P. (1972) *Manual de Cálculos Hidráulicos*, Energía, Moscú, pp.144-145.
- Hager, W. (1989) *Hydraulic Jump in U-Shaped Channel*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol.115, no.5, Nota Técnica, mayo.
- Henderson, F. (1966) *Open Channel Flow*, The Macmillan Co., New York, pp.66-75, 78-81, 84-85.
- Jaeger, C. (1956) *Engineering Fluid Mechanics*, Blackie & Son, Ltd., London and Glasgow.
- Kalfa, V. (1967) *Técnica*, publicación de Hidráulica e Hidrotecnia, Kiev. En: Kiseliiov, P. (1972) *Manual de Cálculos Hidráulicos*, Energía, Moscú, p.144.
- Kiseliiov, P. (1972) *Manual de Cálculos Hidráulicos*, Energía, Moscú, pp.144-145.
- Kunstatsky & Vyborá (1966) En: Hager, W. (1989) *Hydraulic Jump in U-Shaped Channel*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol.115, no.5, Nota Técnica, mayo.
- Lane, E. and C. Kindsvater (1938) *Hydraulic jump in enclosed conduits*, Engineering News-Record, vol.121, no.26, pp.815-817, December.
- Silvester, R. (1965) *Theory and Experiment on the Hydraulic Jump*, Segunda Conferencia Australoasiática de Hidráulica y Mecánica de los Fluidos, pp.A25-A39.
- Sliski, S. (1979) *Cálculos hidráulicos de las obras hidrotécnicas de gran carga*, Energía, Moscú, pp.111-112.
- Smetana, J. (1931) *Hidráulica*, vol.2, Naukadatelství Československé Akademie, VED, Praga.
- Sotelo, G. (2002) *Hidráulica de canales*, UNAM, Facultad de Ingeniería, México D.F., pp.294-300.
- Thiruvengadam, A. (1961) *Hydraulic Jump in Circular Channels*, Water Power, vol.13, December, p.496.

Recibido: enero del 2010
Aprobado: febrero del 2010