

# Modelo matemático MADA para administración de acuíferos: aplicación en acuífero sur de la Habana

## INTRODUCCIÓN

Con el objetivo de estudiar y comprender la compleja dinámica de las aguas subterráneas, una de las técnicas más difundidas a nivel mundial es sin dudas la modelación matemática (Hernández, et al 2001), la cual se basa en una versión simplificada del sistema acuífero real y reproduce o simula de una forma aproximada las excitaciones relevantes provocadas al sistema de forma natural o artificial (Bear, et al 1992). Estos modelos matemáticos de simulación permiten verificar los niveles de las aguas subterráneas en el tiempo y en cualquier lugar del acuífero en estudio conocidas las extracciones realizadas en este cuerpo de agua.

En las últimas décadas los modelos de simulación han sido combinados con técnicas de optimización para determinar la mejor estrategia a seguir en la administración del recurso hídrico, con un objetivo específico y un conjunto de restricciones (Galloway et al, 2003), surgiendo así los llamados modelos de administración.

Estas técnicas de optimización pueden ser separadas en dos grupos, las técnicas no determinísticas dentro de la que se pueden mencionar a las redes neuronales y los algoritmos evolutivos fundamentalmente, y las técnicas determinísticas dentro de las que se citan, entre otras, a la programación lineal, la cuadrática y la programación dinámica, (Marrero, 1985). Para resolver estos problemas de optimización muchas veces se aplica de forma aislada alguno de estos algoritmos, sin embargo, cada vez es más frecuente que se realicen combinaciones entre ellos para evitar obtener una solución no deseada o para disminuir el tiempo de cómputo, estas combinaciones se realizan siempre que el problema las justifique (Hsiao y Chang 2002).

## Resumen / Abstract

*En el presente trabajo se presenta el modelo matemático MADA para la administración óptima de la explotación de acuíferos. Este modelo se sustenta en la inclusión del modelo AQÛIMPE de simulación del flujo de agua subterránea dentro de un algoritmo de programación lineal. Se utiliza MADA en la evaluación de la explotación de la "Cuenca Sur de la Habana", haciendo uso de un conocido Plan de Uso del Agua (PUA), donde queda demostrado que la distribución de la explotación empleada para garantizar el PUA no evalúa las posibilidades de intrusión salina en el acuífero y a tal efecto se brinda una solución.*

**Palabras clave:** explotación de acuíferos, simulación, programación lineal, intrusión salina.

*In this paper the MADA mathematical model is presented for the optimal management of aquifer exploitation. The model is built by embedding the AQÛIMPE model for simulation of ground water aquifers into a linear programming algorithm. MADA is used to evaluate exploitation in «Cuenca Sur de la Habana» aquifer, following a given water use plan (PUA). It is shown in the paper that PUA distribution of well abstractions is not considering possible saline intrusion in the aquifer and to that end a solution is presented.*

**Keywords:** aquifer management, simulation, linear programming, salt intrusion.

Cuando los problemas de optimización presentan funciones objetivo y restricciones lineales o posibles a linealizar es muy común que se emplee un algoritmo de programación lineal que sin dudas es una de las primeras técnicas de optimización que se aplican a los problemas de administración de los recursos hidráulicos.

La capacidad de las técnicas de programación lineal para resolver problemas a gran escala y garantizar la solución óptima global ha llamado la atención de muchos investigadores en el campo de la administración de los recursos hidráulicos. En (Das y Datta, 2001) se pueden consultar un amplio conjunto de aplicaciones a problemas relacionados con la administración del agua subterránea, además en (Bogacki y Pelka, 1985) se presenta la solución de un modelo de simulación – optimización para resolver problemas de administración del agua subterránea, el modelo de simulación es numérico y está basado en el MEF y el de optimización en la programación lineal.

En Cuba se produjo un avance muy importante en esta rama del conocimiento con la creación del modelo matemático de simulación del flujo subterráneo, AQÛIMPE, (Martínez, 1989), en el Centro de Investigaciones Hidráulicas (CIH). Numerosas han sido las aplicaciones de este modelo en acuíferos nacionales e incluso en el extranjero, (Gutiérrez, 2008). Sin embargo, sólo con una herramienta de simulación no se pueden resolver con rigor científico un conjunto de problemas referentes a la administración de la explotación.

En Cuba, una de las primeras aplicaciones de patrones óptimos de explotación prolongada en un acuífero fue planteado por (Dilla, 1993). En este trabajo se emplea el método de la matriz respuesta o funciones tecnológicas algebraicas (FTA) donde finalmente se utiliza un método de optimización, la programación lineal, y de esta forma se resuelven varios problemas de optimización de naturaleza lineal.

Posteriormente, (Mesa, 2004) da solución al problema inverso de estimación de los parámetros hidrogeológicos, conductividad hidráulica (Kd) y coeficiente de almacenamiento (E), aplicando un algoritmo genético de convergencia global llamado Shuffled Complex Evolution (SCE) y fundamentado en el modelo AQÛIMPE. En este trabajo también se recomienda emplear el método SCE en la resolución de problemas referentes a la administración de acuíferos. (Gómez, 2009) incluye el modelo SCE en la tecnología AQÛIMPE, para la estimación o ajuste automático de los parámetros hidrogeológicos del acuífero, Kd y E.

En la presente contribución se discute el modelo de administración MADA, basado en la inclusión del modelo AQÛIMPE dentro de un algoritmo de Programación Li-

neal, y se aplica al acuífero de la cuenca Cuenca Sur de la Habana.

## FUNDAMENTOS Y ESTRUCTURA GENERAL DEL MODELO AQÛIMPE

El modelo matemático AQÛIMPE está integrado por un conjunto de programas que simulan numéricamente el flujo subterráneo no estacionario, lineal y bidimensional en un acuífero. Este modelo fue concebido para simular acuíferos freáticos o artesianos a escala regional, lo que incluye el tratamiento del acuífero visto en planta. Es posible simular su interacción con un cuerpo de agua superficial siempre que exista comunicación entre ellos.

Al analizar el flujo subterráneo surge una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo parabólica, con la que se formula el modelo, ecuación de continuidad (1). Esta ecuación sintetiza el balance hídrico en todos los elementos de la malla, con término fuente–sumidero y condiciones de contorno filtrante o impermeables, permite obtener la carga hidráulica como función de las coordenadas del espacio bidimensional (x,y) y del tiempo (t). La solución se desarrolla a partir del método de los elementos finitos (MEF), utilizando el triángulo cuadrático como elemento, y aplicando la aproximación de Galerkin, (Martínez et al, 2000).

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( mKd \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( mKd \frac{\partial h}{\partial y} \right) + E \frac{\partial h}{\partial t} + W = 0 \quad (1)$$

donde: h: carga hidráulica, [L], m: espesor saturado del acuífero, [L], Kd: conductividad hidráulica, [LT<sup>-1</sup>], E: coeficiente de almacenamiento, adimensional, W: fuente de entrada o salida vertical al elemento, es decir, explotación o recarga.

La estrategia utilizada para la modelación del acuífero es subdividir el área total de la formación acuífera en distintas zonas, atendiendo a las propiedades hidrogeológicas; posteriormente estas zonas son subdivididas en elementos triangulares, donde en cada uno de éstos las propiedades hidrogeológicas son iguales.\* AQÛIMPE utiliza el triángulo cuadrático para su discretización espacial donde se emplean los nodos vértices y los intermedios de los lados de los triángulos, quedando una superficie resultante en cada elemento de tipo parabólica. En este sentido, (Cabrera, 2007) expone las ventajas que este esquema trae consigo.

No es objetivo plantear todo el desarrollo del MEF aplicado a la ecuación (1), (Martínez, 1989). Por eso, se ilustra el sistema matricial expuesto en la ecuación (2), obtenido después de la resolución de las integrales que se generan con la aproximación de Galerkin a la ecuación (1):

$$\sum_{e=1}^{ne} (\omega[R] + [S]) \{h_e\}^k = \sum_{e=1}^{ne} ([S] - (\omega - 1)[R]) \{h_e\}^{k-1} \dots$$

$$\dots + \sum_{e=1}^{ns} -Qs_e^k \frac{A_e}{3} \{000111\}' + \sum_{j=1}^{np} -Qp_j^k \{0\dots100\}' \dots$$

$$+ \sum_{i=1}^{nl} -Qt_i^k \frac{L_i}{6} \{114\}' \quad (2)$$

donde:

$[R] = m_e \frac{A_e}{3} Kd_e [Kab]_{6 \times 6}^e$ , se conoce como matriz de rigidez del elemento.

$A_e$ : área del elemento e,  $[L^2]$

$Kd_e$ : conductividad hidráulica del elemento e,  $[LT^{-1}]$

$[Kab]_{6 \times 6}^e$ : matriz simétrica cuadrada de orden 6, cuyos valores son los mismos para todos los tiempos de un elemento e, pero diferentes para todos los elementos.

$[S] = \frac{E_e A_e}{180 \Delta t} [Kcte]_{6 \times 6}$ , matriz constante

$\Delta t$ : cantidad de unidades de tiempo en el intervalo de tiempo.

$[Kcte]_{6 \times 6}$ : matriz constante para todos los elementos en todos los tiempos.

$\{h_e\}_{6 \times 1}^k$ : valor de las h de los nodos del triángulo o elemento e, cada término del vector está referido a uno de los seis nodos del triángulo y depende del tiempo k.  $[L]$ .

$\{h_e\}_{6 \times 1}^{k-1}$ : igual al anterior pero en el tiempo previo.  $[L]$ .

$Qs_e^k$ : caudal superficial, en forma de intensidad que entra al elemento e, recarga debida a la lluvia en el tiempo k.  $[LT^{-1}]$ .

$Qp_j^k$ : caudal puntual que entra o sale al nodo j de explotación en el tiempo k.  $[L^3 T^{-1}]$ .

$Qt_i^k$ : caudal lateral que entra o sale del acuífero por el lado i de un elemento e.  $[L^2 T^{-1}]$ .

$L_i$ : longitud del lado i.  $[L]$ .

$\{000111\}_{6 \times 1}'$  vector columna, los tres primeros valores son los referentes a los nodos principales y el resto a los nodos secundarios.

$\{0\dots100\}_{n \times 1}'$  vector columna que tiene tantos elementos como nodos de la malla y en él tienen valor uno los referentes a los nodos donde hay gasto puntual.

$\{114\}_{3 \times 1}'$ : vector columna de tres elementos, garantiza que en los lados donde hay gasto lateral se reparten 1/6 de este caudal a cada nodo principal y los restantes 2/3 al nodo secundario.

n: número total de nodos de la malla.

nl: número de lados de triángulos con salidas o aportes laterales (zonas del acuífero que tienen frontera con un río, etc).

np: número de nodos con gastos puntuales.

ns: número de triángulos con entradas o salidas superficiales.

ne: número total de elementos (triángulos).

n: contador de nodos con gastos puntuales.

i: contador de lados con gasto lateral.

e: contador de elementos.

$\omega$ : tiene un valor de 2/3 si se obtiene por el MEF.

Cuando se aplica esta expresión a un acuífero confinado el problema se restringe a resolver k veces el sistema matricial dado en la ecuación (2), el cual se resume en el sistema de ecuaciones lineales mostrado en la ecuación (3):

$$[M]_{n \times n} \{h\}_{n \times 1}^k = \{f\}_{n \times 1} \quad (3)$$

donde  $[M]$  es una matriz cuadrada de orden n, donde cada fila está asociada a uno de los nodos de la malla. Lo mismo sucede con las columnas. En el vector h se guardan las variables a calcular en cada tiempo y f es el vector de los términos independientes donde se almacena el efecto de los caudales extraídos e incorporados al modelo en cada nodo.

## ESTRUCTURA DEL MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL PROPUESTO

El asistente matemático MATLAB (García et al, 2005) posee una función llamada Linprog que resuelve mediante el método Simplex el problema de programación lineal. Esta función es usada en el modelo propuesto y en su forma más general presenta la siguiente estructura:

$$[x, feval] = \text{linprog}(c, A, r, A_{eq}, r_{eq}, lb, ub, x_o) \quad (4)$$

donde c, A y r, son las matrices que intervienen directamente en el problema, x es el vector de variables de decisión que se obtiene y c es un vector de costo o de ponderación de cada una de las variables de decisión.

Con la ecuación (4) se resuelve el siguiente problema:

$$\min cx \quad (5)$$

Sujeto a restricciones de desigualdad:

$$Ax \leq r \quad (6)$$

Restricciones de igualdad:

$$A_{eq} x = r_{eq} \quad (7)$$

Con fronteras inferiores y superiores para cada variable de decisión

$$lb \leq x \leq ub \quad (8)$$

El vector  $x_o$  representa una solución inicial del problema y en el término feval se almacena el valor evaluado de la función objetivo.

## FUNCIONES OBJETIVO Y RESTRICCIONES DEL MODELO DE ADMINISTRACIÓN

En el modelo MADA son tenidas en cuenta un conjunto de funciones objetivos, (Dilla, 1993).

a) Maximizar la suma de las cargas en los nodos de extracción a optimizar  $npa$  del modelo en todos los tiempos.

$$F.O = \max \sum_{j=1}^{npa} \sum_{k=1}^T h_j^k \quad (9)$$

b) Minimizar los abatimientos  $S$  al final del horizonte de planeamiento o tiempo final  $T$ .

$$F.O = \min \sum_{j=1}^{npa} S_j^T \quad (10)$$

De esta forma se satisface la demanda con la menor afectación al acuífero. Por otro lado, la tercera función objetivo concibe la máxima extracción posible.

c) La mayor capacidad de extracción de un acuífero se obtiene al maximizar los caudales en los nodos de extracción a optimizar  $npa$  para todos los tiempos.

$$F.O = \max \sum_{j=1}^{npa} \sum_{k=1}^T Q_j^k \quad (11)$$

En general, las restricciones pueden clasificarse en tres tipos:

1) La suma de los caudales extraídos en cada período por todos los nodos de bombeo del modelo a optimizar debe igualar o superar una demanda prefijada en el período. Este conjunto de restricciones genera  $T$  ecuaciones como la (12):

$$\sum_{j=1}^{npa} \sum_{k=1}^T Q_j^k \geq D_j \quad (12)$$

2) El caudal de extracción de cada nodo de bombeo del modelo a optimizar no debe sobrepasar la capacidad máxima proyectada para los pozos asociados al nodo; aunque al menos debe entregar una demanda local especificada. Dicha serie de restricciones genera  $T \times npa$  ecuaciones (por cada límite), es decir,  $2T \times npa$  ecuaciones en total.

$$Q_j^{mín} \leq Q_j^k \leq Q_j^{máx} \quad (13)$$

3) Los niveles piezométricos en cada nodo de bombeo del modelo a optimizar para cada tiempo deben ser controlados, esto sugiere que estén por debajo de un valor límite prefijado por el modelador. En este caso se generan  $npa$  ecuaciones.

$$h_j^k \leq h_{máx j}^k \quad (14)$$

donde:

$h_j^k$ : Nivel piezométrico en el nodo de extracción a optimizar  $j$ .

$h_{máx j}^k$ : Nivel crítico en el nodo de extracción a optimizar  $j$ . Normalmente es un dato, valor constante en el tiempo.

## MODELO DE ADMINISTRACIÓN (MADA)

Las funciones objetivo definidas en las ecuaciones (9), (10) y (11) son lineales y en este sentido es posible emplear un algoritmo de programación lineal para resolver los problemas de optimización que sugieren dichas expresiones. El método fundamentado en las llamadas funciones tecnológicas algebraicas encuentra relaciones entre los caudales y niveles en los nodos del modelo gracias a un gran número de corridas del modelo de simulación, para posteriormente someter a las mismas a un modelo de programación lineal. Sin embargo, este trabajo propone sustituir estas funciones tecnológicas algebraicas por el modelo de simulación, AQÜIMPE propiamente dicho, e introducir todas sus ecuaciones dentro del modelo de programación lineal, empleando para tal efecto la función Linprog de Matlab. Es importante plantear que este modelo será efectivo para acuíferos confinados o libres que en su modelación puedan ser tratados como confinados, (Gutiérrez, 2008).

El modelo de programación lineal quedaría de la siguiente forma:

- *Función objetivo*: Cada vez que se ejecute el modelo es porque se desea resolver un problema específico que tendrá que ver con algunas de las expresiones (9), (10) u (11). Además, se debe tener en cuenta que las variables de decisión del modelo son los caudales de explotación en los nodos que se quieren optimizar en cada intervalo de tiempo,  $Q_j^k$ , y también los niveles piezométricos en todos los nodos en cada intervalo de tiempo. En esta función objetivo se debe declarar un vector de costo  $c$ , ver (Gutiérrez, 2008), el mismo tiene una fila y  $((n \times T) + (T \times npa))$  columnas. Todos sus elementos son cero, excepto los que participen en la función objetivo que se esté analizando, que toman un valor de  $-1$ .

- *Restricciones de igualdad*: Estas vienen expresadas en Linprog con la ecuación (7) y tienen una gran importancia ya que es en este sistema de ecuaciones donde se incluyen todas las ecuaciones del modelo de simulación, es decir, el modelo no encuentra los niveles en los nodos tiempo a tiempo con la ecuación (3), como se realiza con AQÜIMPE en el problema directo, sino que tiempo a tiempo el sistema (3) se va incluyendo dentro de otro sistema mayor que es el representado en la ecuación (7), quedando una gran matriz  $A_{eq}$  con  $(n \times T)$  filas y  $((n \times T) + (T \times npa))$  columnas, donde están los coeficientes que afectan a todas las variables de decisión. El vector  $b_{eq}$  queda con  $((n \times T) + (T \times npa))$  filas y 1 columna.

Quando se resuelve la programación lineal, se obtienen todos los niveles piezométricos en los nodos y en todos los tiempos, de una vez.

- *Restricciones de desigualdad*: Las restricciones de desigualdad son inecuaciones que permitirán introducir en

el modelo las importantes restricciones que se definieron en (12), (13) y (14). La restricción (12) se introduce mediante las matrices A y r dadas en la ecuación (6) y es importante comprobar que el modelo asuma estas restricciones como de desigualdad del tipo menor o igual que. Sí fueran diferentes se debe multiplicar por -1 a las inecuaciones correspondientes.

La matriz A queda con (T) filas y  $((n \times T) + (T \times npa))$  columnas y los vectores x y b quedan con  $((n \times T) + (T \times npa))$  filas y 1 columna y (T) filas por 1 columna, respectivamente. Para introducir las otras restricciones, dadas en las ecuaciones (13) y (14), se utilizan los vectores de fronteras inferiores y superiores  $\{lb\}$  y  $\{ub\}$ , cada uno de estos vectores tiene dimensiones de  $((n \times T) + (T \times npa))$  filas y una columna. El valor de cada elemento de los vectores es el mínimo o máximo, respectivamente, que puede tener su variable de decisión asociada.

## MODELO REGIONAL DEL ACUÍFERO "CUENCA SUR" DE LA HABANA.

### Características de la zona de ubicación del acuífero.

La zona de estudio se encuentra en el Sur de la provincia de La Habana abarcando un área de 830 km<sup>2</sup>, ver figura 1. Existe en esta zona una gran carsificación de las rocas del complejo carbonatado de mioceno, una diversidad de las formas del carso, compleja relación con la tectónica, una abundante alimentación al acuífero por filtración y poco espesor de la cobertura de las rocas permeables de la zona de aireación entre otros factores que crean condiciones favorables para la formación de considerables recursos de agua subterránea (Llanusa, 1997). Las condiciones hidrogeológicas de la región son bastante complejas (Llanusa, 1997), destacándose una gran heterogeneidad y anisotropía en el acuífero que tiene la peculiaridad de estar abierto al mar.

A lo largo de la costa y con una faja de ancho, de aproximadamente 1 ó 3 km, predomina el suelo Cenagoso. En esa zona se observa la vegetación típica costera representada por distintas especies: mangle, patabán y otras. Orográficamente la región es muy llana, las elevaciones oscilan entre 100 m al norte y 3-5 m al sur. La red fluvial no está bien definida, y es prácticamente imposible delimitar las cuencas hidrológicas. Hacia el sur existe una amplia red de canales cuya alimentación proviene en lo fundamental de las aguas subterráneas, (Llanusa, 1997).

### Modelo conceptual propuesto.

Toda la modelación matemática del acuífero está basada en un conjunto de abstracciones en síntesis de las características físicas reales del sistema natural que será estudiado con fines de aplicación práctica. Los criterios

del modelo conceptual se exponen a continuación.

- El acuífero puede ser simulado con un modelo bidimensional no estacionario en planta, esto quiere decir que sus propiedades hidrogeológicas no varían en dirección vertical.
- El medio filtrante puede simularse como si fuera un medio continuo poroso isotrópico y heterogéneo.
- En el modelo de administración el acuífero será simulado como confinado.

### Discretización de la zona de estudio.

En la conformación de los elementos de la malla discretizada se tuvo en cuenta que tanto la geología como las propiedades hidrogeológicas se mantuvieran homogéneas en esos elementos. En la zona paralela a la costa se emplearon elementos que cubrieran el ancho de esta franja cenagosa, no pudiéndose utilizar elementos más pequeños por la carencia de información. La zona de estudio quedó dividida en 69 triángulos con un total de 158 nodos como se puede observar en la figura 1.

### Condiciones de contorno

Esta zona se encuentra en la vertiente sur de la provincia de La Habana. Por el norte limita con el parte aguas del sur de la Laguna de Ariguanabo y parte de la divisoria central. En esta zona norte el acuífero se encuentra en contacto con formaciones poco permeables, por lo que fue considerado como un contorno impermeable. Las fronteras este y oeste del modelo pueden ser asumidas como impermeables debido a que existe un flujo vertical del norte hacia el sur en estas zonas que no permiten entradas ni salidas de agua subterránea al acuífero por estas fronteras. El límite sur es considerado como una zona de descarga subterránea al mar, con cargas piezométricas conocidas en todos los nodos de este contorno.

Se tomó para estos nodos una carga constante en el tiempo de 0.2 m, para así considerar el incremento de las cargas debido a la acción del dique sur construido a lo largo de la costa, ver (Llanusa, et al 2004).

### Propiedades hidrogeológicas de la zona de estudio.

Se consideran como propiedades hidrogeológicas del acuífero: la conductividad hidráulica, Kd y la porosidad efectiva o coeficiente de almacenamiento, E. Las propiedades hidrogeológicas de los elementos que conforman la zona de estudio son obtenidas de la etapa de calibración, dadas en 36 subzonas, esta información se puede consultar en, (Llanusa et al, 1993) y (Cabrera y Dilla, 2009).

### Niveles piezométricos del acuífero: Estado inicial.

El estado inicial en el acuífero se obtuvo a partir de los valores medidos en los pozos de observación y su cota topográfica. Estos datos se tomaron de una serie de 19

pozos ubicados en la zona acuífera de Güira - Quivicán, y pertenecientes a la red informativa de niveles. Para definir el estado inicial en la modelación se tomaron los datos pertenecientes a la fecha (Noviembre del año 1993) publicados en (Hernández, 2000), estos datos definen una carga media a lo largo de la costa de 0.57 m.

**Alimentación del acuífero debido a la lluvia: recarga.**

(Batista, 1995) hace un análisis de la lluvia media hiperanual desde el año 1964 hasta 1993 con la información de 12 pluviómetros, realizando un balance hídrico diario del suelo de cobertura de la zona de estudio. Este trabajo permitió la obtención del patrón anual de lluvia del 75% de probabilidad el cual coincidió con el del año 1975. De este estudio resultó la distribución espacial (por grupos) de la recarga del acuífero debida a la lluvia (agua en exceso del modelo de balance hídrico) así como su cuantificación en volumen de agua, ver tabla 1.

los gastos puntuales, se brindan en (Batista, 1995). De este estudio se definió una demanda total de 295.20 hm<sup>3</sup>/año, materializada en 96 nodos.

**Análisis de la demanda de explotación global solicitada al acuífero.**

Una forma de examinar si el acuífero puede satisfacer la explotación global solicitada es realizando una simulación con el criterio de que al final del año el volumen de agua en el acuífero sea similar al del inicio de la simulación, concepto equivalente al rendimiento seguro de la escuela norteamericana, (Hernández, 1991). En la figura 2(a) se muestra un gráfico de volúmenes en el acuífero en cada mes del año simulado con el modelo AQÜIMPE.

Es interesante observar que bajo el régimen de explotación y de recarga antes definidas, el acuífero al final del año queda con un volumen ligeramente menor al del inicio de la simulación.

Un análisis más consistente pudiera ser el de repetir este año patrón varios años seguidos para observar la tendencia de regulación del acuífero. Por ejemplo, se simularían cinco años de baja recarga al acuífero (75 % de probabilidad), con una explotación constante (equivalente al PUA del año 1995). El gráfico de volúmenes de esta variante se muestra en la figura 2 (b).

En la figura 2 (b) se aprecia una tendencia de estabilidad del acuífero, lo que demuestra que el Plan de Uso del Agua de 295.20 hm<sup>3</sup>/año, manejado por (Batista, 1995), tiene un gran valor práctico al garantizar el equilibrio hidráulico en el acuífero bajo la lluvia del 75% probabilidad.

En la figura 3 se muestra un mapa de niveles del agua subterránea correspondiente al tiempo 5 de las simulaciones realizadas. Se observa en la figura 2 (a) que este es el tiempo en el primer año en que menor volumen acumuló el acuífero y por lo tanto menores niveles piezométricos se deben esperar en toda la región. De este mapa, es importante resaltar que existen un conjunto de nodos, ubicados hacia la izquierda y en el centro, en donde las cargas hidráulicas están por debajo del nivel cero o nivel medio del mar. Este aspecto es extremadamente importante en acuíferos de este tipo, que están en contacto con el mar, debido a la contaminación de pozos producto del avance de la intrusión salina provocado por el bombeo excesivo en la zona.

Es por esta razón, que en el presente trabajo se aplica un modelo de administración, para proponer una política de explotación que garantice una demanda global aceptable y que conserve los recursos hidráulicos. Además, debe estar distribuida de una forma eficaz en cuanto a garantizar que, en ningún pozo y en ningún tiempo, existan niveles por debajo del nivel medio del mar.

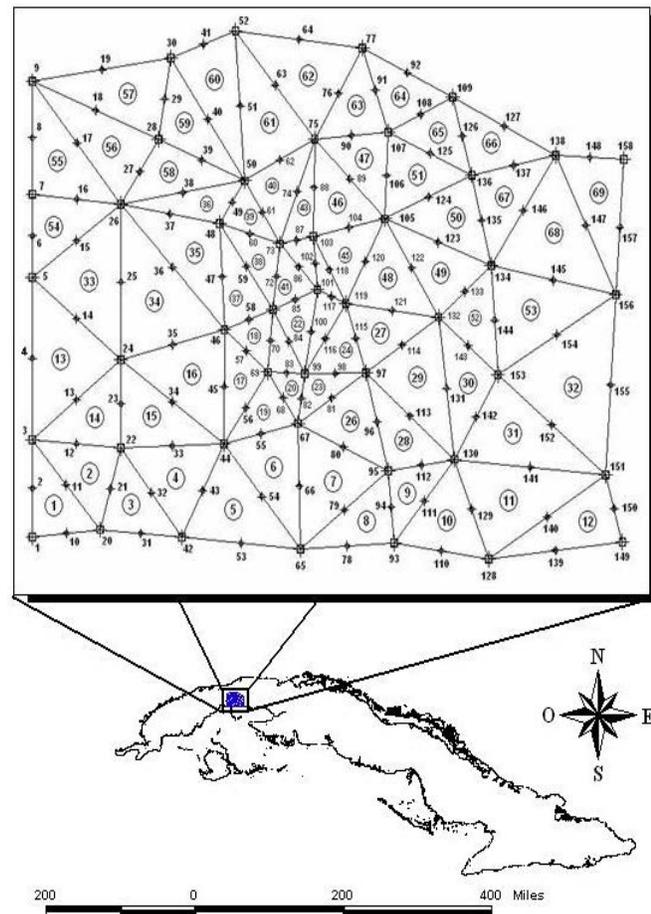


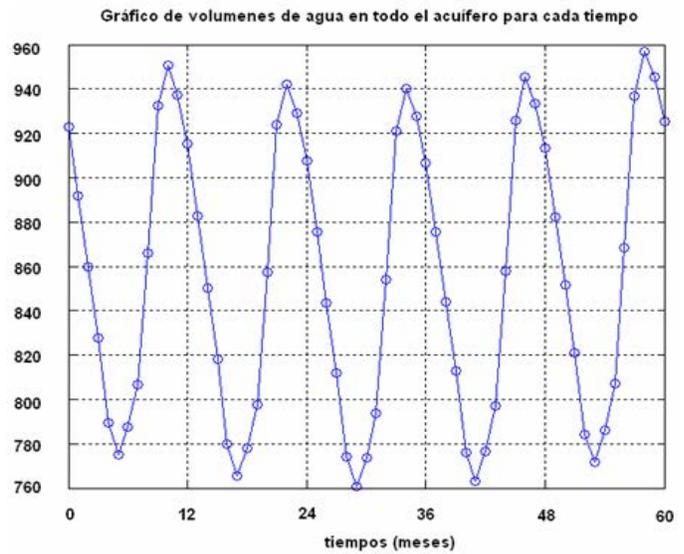
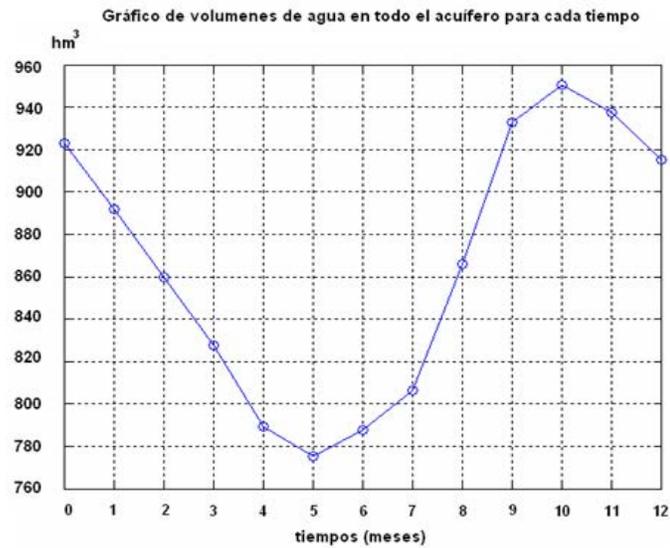
Figura 1: Ubicación de la zona de estudio y discretización del acuífero con la numeración de nodos y triángulos.

**Tratamiento de la explotación al acuífero.**

Los volúmenes de explotación por nodos empleados en las nuevas simulaciones, necesarios para establecer

Tabla 1. Recarga al acuífero en lámina de agua acumulada, en mm, por mes y grupo de infiltración.

Grupo	$\Delta T_1$	$\Delta T_2$	$\Delta T_3$	$\Delta T_4$	$\Delta T_5$	$\Delta T_6$	$\Delta T_7$	$\Delta T_8$	$\Delta T_9$	$\Delta T_{10}$	$\Delta T_{11}$	$\Delta T_{12}$
1	0	0	0	0	12.6	98.9	73.4	120.5	156.6	107.1	62.5	6.4
2	0	0	0	0	0	22.5	108.4	109.8	110.6	32.8	1.2	0.1
3	0	0	0	0	0	2.9	7.3	17.3	13.8	41.4	3.2	0.1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.8	42.8	2.7
5	0	0	0	0	2.9	4.0	76.9	133.6	156.2	46.5	1.8	0.1
6	0	0	0	0	14.8	56.7	28.7	62.4	72.2	62.3	2.4	0.1
7	0	0	0	0	62.1	15.4	0.7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	2.5	10.3	0.5	0	33.7	61.8	2.3	0.1
9	0	0	0	0	4.4	8.1	81.5	121.0	174.3	39.8	1.5	0.1
10	0	0	0	0	2.0	60.0	47.8	164.8	229.5	64.9	4.5	0.2
11	0	0	0	0	0	116.7	84.5	79.0	54.0	51.0	1.9	0.1
12	0	0	0	0	39.8	59.9	76.2	249.3	151.7	44.6	1.7	0.1



(a) Un año

(b) Cinco años

Figura 2: Gráfico de volúmenes por meses en todo el acuífero.

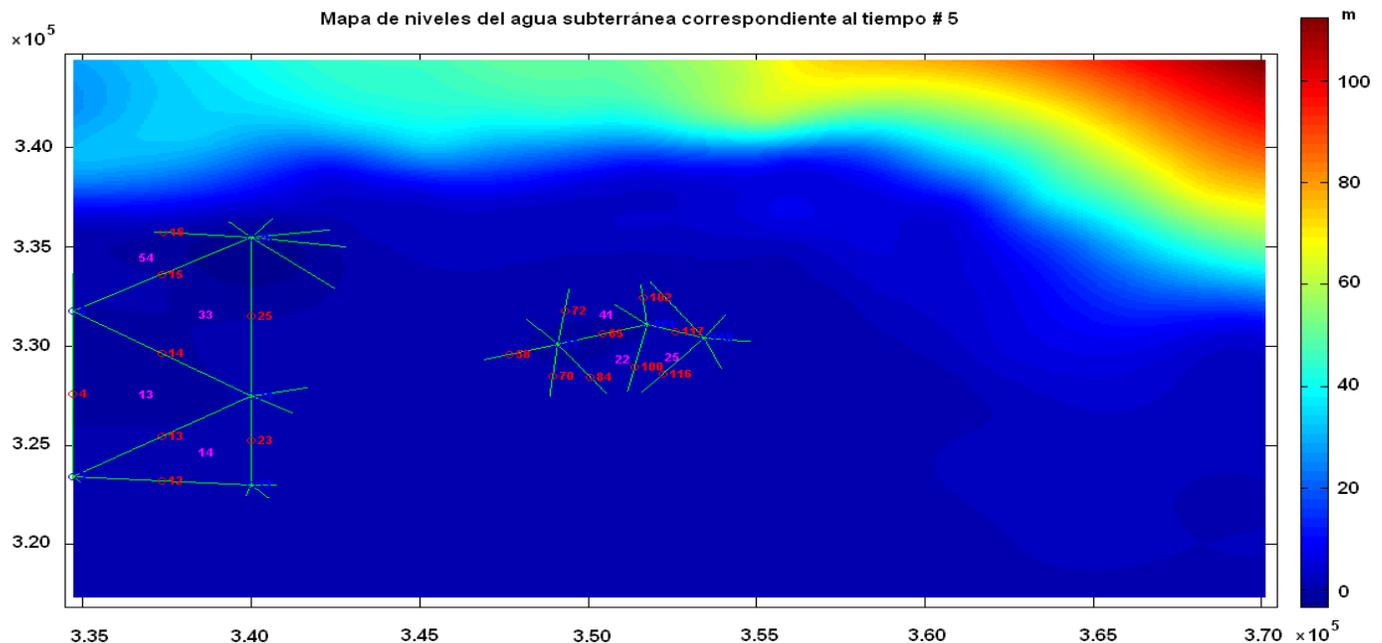


Figura 3: Mapa digital de niveles del agua subterránea en el tiempo # 5, cuadrículas uniformes de 20 m.

## APLICACIÓN DEL MODELO MADA EN LA OPTIMIZACIÓN DE LA EXPLOTACIÓN DEL ACUÍFERO

La primera variante analizada emplea un intervalo mensual utilizando el mismo estado inicial y la recarga definidos anteriormente. Se tendrá en cuenta una extracción global conocida de 295.20 hm<sup>3</sup>/año distribuida por meses como

se brinda en (Batista, 1995). Serán variables de decisión en el problema los caudales de los 36 nodos donde se encuentra un 90% de la explotación total en cada uno de los tiempos y las cargas piezométricas en todos los nodos y tiempos. En (Cabrera y Dilla, 2009) se muestran los límites inferiores y superiores de caudales y niveles. Para cada uno de los intervalos de tiempos se define un valor de demanda acorde con los datos de extracciones manejados

Tabla 2. Caudales optimizados para cada tiempo en los nodos del acueducto.

Nodos de explotación del acueducto, caudal en (hm <sup>3</sup> /mes)												
Nodos	$\Delta T_1$	$\Delta T_2$	$\Delta T_3$	$\Delta T_4$	$\Delta T_5$	$\Delta T_6$	$\Delta T_7$	$\Delta T_8$	$\Delta T_9$	$\Delta T_{10}$	$\Delta T_{11}$	$\Delta T_{12}$
45	0.07	0.07	0.04	0.42	0.26	0.26	0.25	0.22	0.21	0.23	0.24	0.26
47	0.08	0.48	0.01	2.71	0.33	1.32	1.17	0.88	0.65	0.74	0.84	0.88
71	0.23	0.13	0.32	0.29	0.18	0.27	0.31	0.28	0.27	0.31	0.35	0.39
73	0.56	0.73	0.73	0.76	0.60	0.50	0.45	0.35	0.31	0.33	0.36	0.37
85	0.21	0.18	0.24	0.34	0.18	0.23	0.23	0.21	0.20	0.22	0.23	0.25
86	0.22	0.37	0.38	0.44	0.27	0.28	0.27	0.23	0.22	0.23	0.24	0.25
87	0.43	0.54	0.53	0.57	0.44	0.39	0.36	0.30	0.27	0.28	0.30	0.31
88	0.96	0.96	0.96	0.97	0.86	0.76	0.70	0.54	0.46	0.47	0.48	0.49
101	0.19	0.15	0.21	0.16	0.15	0.23	0.24	0.21	0.20	0.22	0.23	0.24
102	0.16	0.67	0.72	0.71	0.45	0.46	0.43	0.33	0.30	0.33	0.35	0.37
103	0.87	1.03	1.03	1.06	0.84	0.73	0.64	0.45	0.38	0.41	0.44	0.46
104	0.55	0.55	0.55	0.57	0.48	0.43	0.40	0.33	0.30	0.31	0.32	0.32
119	0.65	0.63	0.68	0.70	0.46	0.46	0.43	0.34	0.31	0.33	0.36	0.37
123	0.38	0.38	0.38	0.38	0.31	0.30	0.28	0.24	0.22	0.22	0.22	0.21
124	0.38	0.37	0.37	0.38	0.33	0.30	0.28	0.24	0.22	0.22	0.22	0.21

Tabla 3. Caudales optimizados para cada tiempo en los nodos de la agricultura

Nodos de explotación de la agricultura, caudal en (hm <sup>3</sup> /mes)												
Nodos	$\Delta T_1$	$\Delta T_2$	$\Delta T_3$	$\Delta T_4$	$\Delta T_5$	$\Delta T_6$	$\Delta T_7$	$\Delta T_8$	$\Delta T_9$	$\Delta T_{10}$	$\Delta T_{11}$	$\Delta T_{12}$
3	0.67	0.35	0.22	0.12	0.07	0.09	0.09	0.08	0.11	0.21	0.19	0.07
4	0.67	0.23	0.26	0.94	0.11	0.14	0.31	0.39	0.42	0.48	0.57	0.68
5	0.05	0.16	0.46	0.18	0.02	0.03	0.06	0.34	0.37	0.33	0.23	0.14
13	2.50	1.52	0.36	0.93	0.10	0.13	0.08	0.25	0.30	0.38	0.44	0.59
14	0.16	0.24	0.13	0.91	0.05	0.07	0.24	0.44	0.42	0.45	0.41	0.51
15	0.27	0.46	0.24	2.36	0.09	0.15	0.55	0.76	0.60	0.58	0.58	0.80
16	1.79	1.12	2.08	1.14	0.45	0.42	0.65	0.66	0.58	0.64	0.83	0.67
24	0.95	0.20	1.25	0.51	0.12	0.27	0.31	0.43	0.45	0.55	0.70	0.61
25	0.44	0.19	1.77	2.90	0.49	0.57	1.32	1.05	0.83	0.88	1.10	1.20
26	1.81	3.63	1.41	0.80	0.53	0.60	0.76	0.98	0.89	0.96	0.95	0.74
35	0.04	0.07	0.04	0.04	0.12	0.36	0.40	0.50	0.50	0.57	0.61	0.63
36	0.08	0.13	0.06	0.18	0.60	0.82	0.94	0.74	0.65	0.68	0.71	0.73
37	2.80	2.63	2.79	2.72	1.90	1.21	0.99	0.80	0.69	0.69	0.69	0.66
131	0.07	0.07	0.04	0.42	0.26	0.26	0.25	0.22	0.21	0.23	0.24	0.26
135	0.08	0.48	0.01	2.71	0.33	1.32	1.17	0.88	0.65	0.74	0.84	0.88
151	0.23	0.13	0.32	0.29	0.18	0.27	0.31	0.28	0.27	0.31	0.35	0.39
152	0.56	0.73	0.73	0.76	0.60	0.50	0.45	0.35	0.31	0.33	0.36	0.37
153	0.21	0.18	0.24	0.34	0.18	0.23	0.23	0.21	0.20	0.22	0.23	0.25
154	0.22	0.37	0.38	0.44	0.27	0.28	0.27	0.23	0.22	0.23	0.24	0.25
155	0.43	0.54	0.53	0.57	0.44	0.39	0.36	0.30	0.27	0.28	0.30	0.31
156	0.96	0.96	0.96	0.97	0.86	0.76	0.70	0.54	0.46	0.47	0.48	0.49

del PUA de 295.20 hm<sup>3</sup>/año, estos valores organizados por meses, en hm<sup>3</sup>/mes, son: 28.0, 28.0, 28.0, 34.0, 20.0, 18.0, 18.5, 18.0, 16.5, 17.5, 18.6, 19.0.

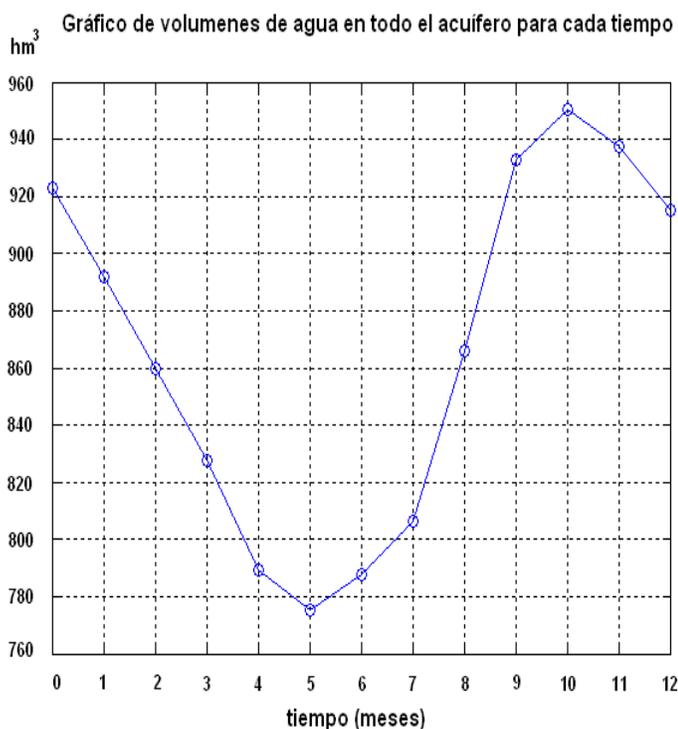
Obsérvese que la suma de ellos da un valor de 264.10 hm<sup>3</sup>/año, el cual es menor que el del PUA y esto tiene sentido ya que la diferencia es de alrededor del 10% y corresponde con un caudal que no será optimizado o sea que es conocido e impuesto, (Cabrera y Dilla, 2009). La función objetivo utilizada en este estudio es la que responde a la ecuación 11, o sea, implica maximizar la suma de los caudales en los 36 nodos de extracción, en todos los tiempos. En esta primera optimización las restricciones de demanda se definieron como: menor o igual que. Esto garantiza, por ejemplo, que en el primer tiempo la suma de todos los caudales en los 36 nodos de optimización sea como máximo igual a 28.0 hm<sup>3</sup>/mes, y como la función objetivo implica maximizar el caudal es de esperar que ese sea el resultado. En este caso, es interesante el resultado de la distribución que propone el modelo, que no tiene que coincidir con la forma de explotación real, brindada en (Batista, 1995).

Los resultados de los caudales, una vez ejecutado el modelo MADA, se muestran en las tablas 2 y 3, y los volúmenes obtenidos en el acuífero para cada tiempo en la figura 4(a). Es importante recordar que con esta distribución de caudales se cumplen todas las restricciones definidas anteriormente, lográndose que no existan niveles negativos en ninguna zona del acuífero.

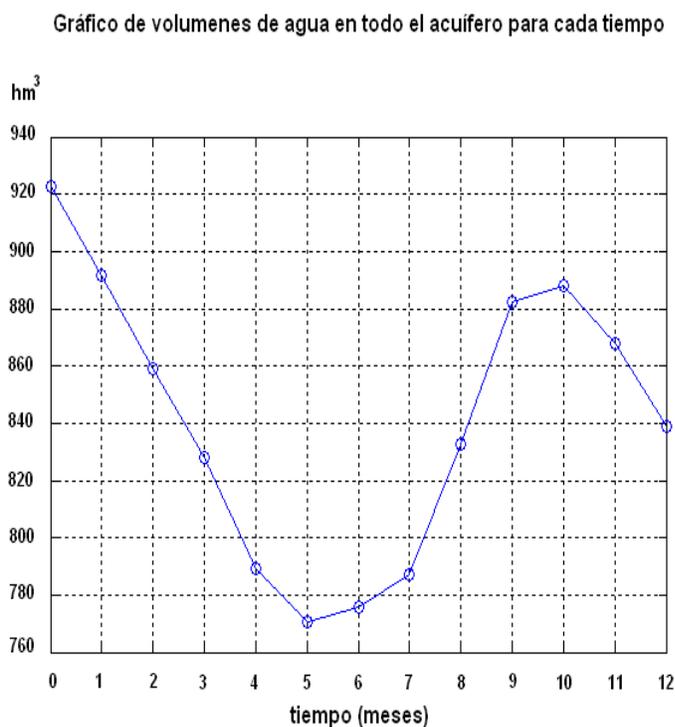
Se realizó otra optimización con las mismas características que la anterior pero en este caso sin tomar en cuenta las restricciones de demanda, es decir, que el modelo podría decidir extraer toda la máxima cantidad de agua posible cada mes garantizando los niveles piezométricos en los límites antes definidos. Los resultados gráficos en volúmenes de esta simulación se muestran en la figura 4 (b).

Como puede observarse en la figura 4(b) los volúmenes acumulados son menores y esto es debido a una fuerte extracción que ascendió a unos 339.28 hm<sup>3</sup>/año, lo que representa un 128.5% del volumen necesario (264.10 hm<sup>3</sup>/año) para garantizar el PUA. Esta excesiva explotación lleva al acuífero a terminar en una situación crítica en los niveles al fin del año. Este resultado obtenido tiene un gran valor práctico ya que brinda una idea del máximo caudal anual posible a extraer bajo las condiciones de un año seco (75% de probabilidad de lluvia) y garantizando niveles piezométricos por encima del nivel medio del mar.

Finalmente, se realizó una optimización de la explotación repitiendo el mismo año hidrológico 5 veces, por lo que se tomaron en cuenta en total 60 intervalos de tiempo. Lo que se busca ahora con este análisis es apreciar el comportamiento del acuífero bajo la acción de la demanda solicitada en un período seco prolongado, en este caso de 5 años. Los resultados obtenidos de la simulación en cuanto al cumplimiento de la demanda exigida cada mes en cada uno de los 5 años se presentan en la tabla 3. En



(a)



(b)

Figura 4: (a) Volúmenes en el acuífero obtenidos en la optimización con restricciones en la demanda. (b) Volúmenes en el acuífero obtenidos en la optimización sin restricciones en la demanda.

Tabla 3. Valores de los volúmenes de agua extraídos cada mes en cada uno de los 5 años simulados.

Meses	Demandas prefijadas (hm <sup>3</sup> /año)	Extracciones acumuladas (hm <sup>3</sup> /año)				
		Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
1	28	28	28	28	26.23	26.85
2	28	28	28	19.36	18.49	18.13
3	28	28	25.31	20.39	20.37	17.95
4	34	33.79	20.7	13.91	13.89	15.29
5	20	20	20	19.15	18.99	20
6	18	18	18	18	18	18
7	18.5	18.5	18.5	18.5	18.5	18.5
8	18	18	18	18	18	18
9	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5
10	17.5	17.5	17.5	17.5	17.5	17.5
11	18.6	18.6	18.6	18.6	18.6	18.6
12	19	19	19	19	19	19
Total	264.1	263.89	248.11	226.91	224.07	224.32

dicha tabla se observa que en el primer año se garantiza la demanda planteada, sin embargo en los meses 3 y 4 del segundo año no se puede entregar la demanda y es lógico que sea precisamente en estos meses que comience la crisis ya que en los primeros 4 meses del año no hay recarga al acuífero (ver tabla 1), sin embargo, se le pide una extracción considerable sobre todo en el mes 4 que asciende a 34.0 hm<sup>3</sup> y este efecto puede ser soportado el primer año pero posteriormente comienzan a aparecer años con déficit.

Estos déficit pueden observarse en la tabla 3 en las celdas marcadas. Con estos resultados se demuestra que el acuífero no puede cumplir con las demandas planteadas, sin embargo, si se quisiera distribuir equitativamente este déficit en los años, se pudiera proponer un descenso de las demandas, en hm<sup>3</sup>/mes, de la siguiente forma: 28.0, 23.0, 20.0, 20.0, 19.0, 18.0, 18.5, 18.0, 16.5, 17.5, 18.6, 19.0.

La suma de ellas da un valor de 236.10 hm<sup>3</sup>/año. La diferencia entre el PUA y este valor es de 28.0 hm<sup>3</sup>/año. Pudiera pensarse en variar la distribución en función de los objetivos que se quieran garantizar, sin embargo, con esta distribución de demandas por meses obtenida se garantiza la entrega para las condiciones exigidas.

## CONCLUSIONES

- Se realiza la concepción teórica general de un modelo de optimización para la administración de la explotación de acuíferos hidráulicamente confinados, llamado MADA.

La originalidad del modelo propuesto se basa en introducir las ecuaciones, que emplea un modelo de simulación de acuíferos, AQUIMPE, como restricciones de igualdad al emplear la programación lineal como técnica de optimización. Además, se tienen en cuenta un conjunto de restricciones a las variables de decisión que enriquecen el valor práctico de este modelo.

- Queda demostrada la factibilidad del modelo propuesto MADA al llevarse a cabo una evaluación crítica de la explotación en el modelo regional de la Cuenca Sur de la Habana. En este caso de estudio se demostró que los resultados que brinda el modelo MADA, para la distribución de la explotación que garantiza el Plan de Uso del Agua, evalúa las posibilidades de intrusión salina en el acuífero, o sea, se obtiene una distribución de caudales que respeta los valores piezométricos regionales críticos en el acuífero.

- Se comprueba que el nivel de extracciones correspondiente al Plan de Uso del Agua puede verse afectado por el efecto de varios años secos continuados. Se brinda el volumen de déficit creado y además se muestra la flexibilidad para encontrar soluciones a estos problemas dependiendo de los objetivos que persiga el modelador.

## REFERENCIAS

- BATISTA, C. J (1995). Nuevas experiencias en la modelación de GÜIRA - QUIVICÁN. Tesis de maestría. Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico «José Antonio Echeverría», La Habana, Cuba.

- 2- BEAR, J., S. B. MILOVAN y R. R. RANDALL (1992). Fundamentals of Ground-Water Modeling. Ground Water Issue. EPA/540/S-92/005. <http://www.epa.gov/tio/tsp/download/issue13.pdf>
- 3- BOGACKI, W., W. PELKA (1985). Numerical model for optimal groundwater management. Disponible en: <http://www.cig.ensmp.fr/~iahs/redbooks/a142/142061.pdf>
- 4- CABRERA, E (2007). Simulación de acuíferos con el empleo de herramientas de los Sistemas de Información Geográfica. Tesis de maestría. Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico «José Antonio Echeverría», La Habana, Cuba.
- 5- CABRERA, E., F. DILLA (2009). Modelo de administración de acuíferos: MADA. Revista Ingeniería Hidráulica en México. (Enviado a la revista).
- 6- DAS, A., B. DATTA (2001). Application of optimization techniques in groundwater quantity and quality management. Sadhana, Vol. 26, Part 4, pp. 293-316, August 2001. <http://www.ias.ac.in/sadhana/Pdf2001Aug/pe865.pdf>
- 7- DILLA, F (1993). Modelación matemática del flujo subterráneo y las técnicas de optimización aplicadas en la investigación y explotación de acuíferos a escala regional. Tesis doctoral, capítulo V. Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico «José Antonio Echeverría», Ciudad de la Habana, Cuba.
- 8- GALLOWAY, D. L.; ALLEY, W. M.; BARLOW, P.M.; REILLY, T.E.; TUCCI, P (2003). Involving issues and Practices in Managing Ground-Water Resources. Case Studies on the Role of Science. U. S. Department of interior. U.S. Geological Survey, Circular 1247; 19-24.
- 9- GARCÍA, J.; RODRÍGUEZ, I. J.; VIDAL, J (2005). Aprenda Matlab 7.0 como si estuviera en primero. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid. Diciembre.
- 10- GÓMEZ, M (2009). Plataforma modular integrada para la gestión del agua subterránea como recurso. Tesis doctoral. Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico «José Antonio Echeverría», Ciudad de la Habana, Cuba.
- 11- GUTIÉRREZ, V. A (2008). Propuesta de un modelo matemático para la administración óptima de acuíferos. Tesis de grado. Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico «José Antonio Echeverría», Ciudad de la Habana, Cuba.
- 12- HERNÁNDEZ, A. O., MARTÍNEZ, B. J., DILLA, F.; LLANUSA, H. (2001). Modelación de Acuíferos. Centro de Investigaciones Hidráulicas. Facultad de Ingeniería Civil. ISPJAE, Ciudad de la Habana, Cuba.
- 13- HERNÁNDEZ, C. L (2000). Modelación matemática del acuífero costero cuenca sur de la Habana con información actualizada. Trabajo de Diploma, Facultad de Civil-ISPJAE.
- 14- HERNÁNDEZ, A. O (1991). La explotación de acuíferos a escala regional y la modelación matemática como su base tecnológica. Tesis en opción del grado científico de Doctor en Ciencias Técnicas. ISPJAE, Ciudad de la Habana, Cuba.
- 15- HSIAO, C. T. y L. C. CHANG (2002). Dynamic Optimal Groundwater Management with Inclusion of Fixed Costs. Journal of Water Resources Planning and Management, January/February; 57-65.
- 16- LLANUSA, H.; MARTINEZ, B. J.; BATISTA, C. J.; HERNANDEZ, A (1993). Tecnología de Simulación de los acuíferos costeros Artemisa-Quivicán. Informe Técnico, CIH-ISPJAE.
- 17- LLANUSA, H (1997). Modelación matemática de la intrusión salina. Tesis presentada en opción al grado de Doctor en Ciencias Técnicas. ISPJAE. CIH. C. de la Habana.
- 18- LLANUSA, H.; HERNÁNDEZ, A.; MARTÍNEZ, B. J.; DILLA, F (2004). Modelo del acuífero costero sur de La Habana: Evaluación del dique. Primer taller de expertos en vulnerabilidad de acuíferos costeros en el caribe insular. Ciudad de la Habana, Cuba.
- 19- MARTÍNEZ, B. J.; LLANUSA, H.; HERNÁNDEZ, A.; DILLA, F (2000). Manual del usuario del sistema AQÜIMPE. Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico «José Antonio Echeverría», La Habana, Cuba.
- 20- MARTÍNEZ, B. J (1989). Simulación matemática de cuencas subterráneas: flujo impermanente bidimensional. Monografía. Centro de Investigaciones Hidráulicas, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico «José Antonio Echeverría», Ciudad de la Habana, Cuba.
- 21- MARRERO, N (1985). Técnicas de Optimización aplicadas a la Ingeniería Hidráulica. Publicación del Ministerio de Educación Superior (MES). Cuba.
- 22- MESA, R. H (2004). Solución del problema inverso en modelos de flujo del agua subterránea mediante un algoritmo de convergencia global. Tesis doctoral, Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico «José Antonio Echeverría», La Habana, Cuba.