

Deducción analítica de las curvas características de las bombas rotodinámicas en paralelo

Yaset Martínez Valdés email: yaset@cih.cujae.edu.cu

Profesor Auxiliar, Departamento de Ingeniería Hidráulica, Centro de Investigaciones Hidráulicas (CIH), Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría (Cujae), Marianao, La Habana, Cuba.

Félix Riaño Valle email: riano@tesla.cujae.edu.cu

Profesor Titular, Vicerrectoría Docente, Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría (Cujae), Marianao, La Habana, Cuba.

RESUMEN

En este artículo se presenta una metodología para la determinación de los coeficientes de la expresión matemática de cada una de las curvas características resultantes de colocar bombas rotodinámicas iguales en paralelo, partiendo de conocer las de una de ellas. La metodología propuesta, denominada Método de las Áreas, está basada en la relación directa que existe entre las áreas bajo las curvas (polinomios) de una bomba y la correspondiente al caso en cuestión (n bombas en paralelo). El objetivo de la misma es determinar los coeficientes de las curvas características resultantes de la combinación de bombas rotodinámicas en paralelo, así como proporcionar una herramienta para conocer el procedimiento de obtención de dichos coeficientes característicos.

Palabras clave: bombas en paralelo, bombas rotodinámicas, coeficientes característicos, curvas características.

Analytical deduction of the characteristic curves of rotodynamic pumps in parallel

ABSTRACT

This paper presents a methodology for the determination of the coefficients of the mathematical expression of each of the characteristic curves resulting from placing rotodynamic pumps in parallel, starting from knowing the curves of one of them. The proposed methodology, called Area Method, is based on the direct relationship between the areas under the curves (polynomials) of a pump and the one corresponding to the case in question (n parallel pumps). The aim of the paper is to determine the coefficients of the characteristic curves resulting from the combination of rotodynamic pumps in parallel, as well as to provide a tool for knowing the method of obtaining such characteristic coefficients.

Keywords: pumps in parallel, rotodynamics pumps, characteristic coefficients, characteristic curves.

INTRODUCCIÓN

En distintas aplicaciones de las bombas rotodinámicas ocurren situaciones que requieren analizar diferentes opciones de operación para satisfacer las necesidades que se presenten.

Debido a esto, se apela en ocasiones a cambiar la velocidad de rotación de una bomba, operarla a velocidad variable, recortarle el impelente, combinarlas en paralelo o en serie, entre otras posibilidades, que permitirán resolver el problema en cuestión (Martínez 2011), (Pérez Franco 2012).

Tradicionalmente la información relacionada con el comportamiento de las bombas rotodinámicas ha sido brindada de forma gráfica, mediante las conocidas curvas características de Carga-Capacidad, Eficiencia-Capacidad, Potencia-Capacidad y NPSH_r-Capacidad.

Sin embargo, hace ya algunos años, estimulados por la extensión del uso de la computación, se comienza a generalizar el empleo de ecuaciones matemáticas en sustitución de la forma gráfica para brindar esta información y estudiar el comportamiento de los sistemas de bombeo (Riaño y Lorence 1986).

De esta manera, resulta imprescindible encontrar la expresión matemática de las curvas características de las bombas rotodinámicas a partir de los gráficos proporcionados por el fabricante, ya que estos raramente brindan la información analíticamente (Pérez 2006).

Para obtener las ecuaciones que representan las curvas características de las bombas se seleccionan una serie de puntos representativos de estas y se aplica el Método de los Mínimos Cuadrados para encontrar las expresiones matemáticas correspondientes (Pérez Franco 2012).

Las ecuaciones que modelan las cuatro curvas características de diseño de las bombas rotodinámicas son (Turiño 1996), (Pérez Franco 1999), (Martínez 2011):

$$\text{Curva carga-capacidad, (H-Q):} \quad H = A \pm BQ - CQ^2 \quad (1)$$

donde: H : carga que desarrolla la bomba, (m); A : coeficiente del polinomio representativo de la curva $H-Q$ que define el valor de la carga que desarrolla la bomba para caudal cero o válvula cerrada (m); B y C : coeficientes del polinomio representativo de la curva $H-Q$ que están en función de las pérdidas de carga en el interior de la bomba (s/m^2), (s^2/m^5) respectivamente y Q : caudal impulsado por la bomba (m^3/s).

$$\text{Curva potencia-capacidad, (P-Q):} \quad P = D \pm EQ \mp FQ^2 \quad (2)$$

donde: P : potencia absorbida por la bomba, (kW); D : coeficiente del polinomio representativo de la curva $P-Q$, que define el valor de la potencia consumida por la bomba para caudal cero (kW) y E y F : coeficientes del polinomio representativo de la curva $P-Q$ dependientes de las pérdidas de potencia de la bomba ($s \cdot kW/m^3$), ($s^2 \cdot kW/m^6$), respectivamente.

$$\text{Curva eficiencia-capacidad, } (\eta-Q): \quad \eta = GQ - HQ^2 \quad (3)$$

donde: η : eficiencia de la bomba (adim.) y G y H : coeficientes del polinomio representativo de la curva $\eta-Q$ (s/m^3), (s^2/m^6) respectivamente.

$$\text{Curva NPSH}_r\text{-capacidad, } (NPSH_r-Q): \quad NPSH_r = I - JQ + KQ^2 \quad (4)$$

donde: $NPSH_r$: $NPSH$ requerida por la bomba, (m) e I , J y K : coeficientes del polinomio representativo de la curva $NPSH_r-Q$ que describen las características de succión de la bomba (m), (s/m^2), (s^2/m^5) respectivamente.

También son conocidas las expresiones analíticas de las curvas características resultantes del acople de las bombas rotodinámicas de igual comportamiento hidráulico en serie y en paralelo, así como aquellas que se derivan de la adecuación de las curvas características de las bombas rotodinámicas a nuevas condiciones de operación (Cabrera 2009). Sin embargo, en la literatura consultada sobre el tema, no se dispone de todas las expresiones analíticas al respecto y de aquellas que existen, no se define cómo fueron obtenidas, lo cual limita el futuro trabajo con estas.

DESARROLLO

En este trabajo se presenta una metodología analítica propuesta por los autores denominada Método de las Áreas. El objetivo de la misma es determinar los coeficientes de las curvas características resultantes de la combinación de bombas rotodinámicas de iguales características hidráulicas en paralelo, así como proporcionar una herramienta para conocer el procedimiento de obtención de dichos coeficientes característicos.

La metodología propuesta se basa en el principio de establecer la relación directa que existe, entre las áreas definidas bajo las curvas características de la bombas rotodinámicas y la resultante de su acople con otras iguales en paralelo, apoyado en ciertos conceptos matemáticos de operación que caracterizan las condiciones del sistema hidráulico de la combinación. En este trabajo se desarrolla el procedimiento analítico que permite calcular los coeficientes de las expresiones analíticas de las curvas características resultantes de colocar n bombas en paralelo.

Acople de bombas rotodinámicas en paralelo

Cuando se acoplan las bombas en paralelo, se aspira el fluido generalmente de un punto común y se bombea hacia la misma tubería de descarga. Por tanto, en este tipo de acople lo que se suman son los caudales, conservándose las cargas. Como la carga en el nodo de descarga común es una sola, cada bomba debe ajustar su funcionamiento a dicha carga. Las leyes fundamentales del comportamiento hidráulico de las bombas trabajando en paralelo son (Martínez y Riaño 2010), (Riaño 2007):

1. Se suman los gastos de las distintas bombas para cargas iguales en el nodo común de descarga para así obtener el caudal total de bombeo.
2. La potencia necesaria resultante será la suma de las potencias para las cargas iguales correspondientes a cada caudal.

3. En el caso de n bombas de iguales características, la eficiencia será igual a la de una bomba. Cuando son bombas con características hidráulicas diferentes, la eficiencia de la combinación se determina para cada carga, a través de la potencia de la combinación como suma de las potencias individuales para cargas iguales.

El caso más frecuente en la práctica es que las bombas colocadas en serie o en paralelo sean iguales. Una bomba de doble succión es el equivalente práctico de dos bombas iguales conectadas en paralelo. Un impelente de doble succión es el resultado de la unión por la cara trasera del disco, de dos impelentes de simple succión, como en un espejo (Pérez Franco 2012), (Grundfos Pumps 2004). Debido a esto, el comportamiento hidráulico de un impelente de doble succión es como si se pusieran dos impelentes de simple succión a trabajar en paralelo (Fernández 2000), (Pérez Franco 2012).

Teniendo en cuenta estos principios del comportamiento hidráulico de la combinación de bombas rotodinámicas en paralelo se pueden entender mejor los conceptos matemáticos de operación que a continuación se describen para cada una de las curvas características.

CURVA CARGA-CAPACIDAD (H_p-Q)

Conceptos matemáticos de operación

Para el caso de n bombas iguales conectadas en paralelo existe una relación lineal entre las áreas bajo las curvas (polinomios) de una bomba y la correspondiente a las de n bombas acopladas en paralelo. Del análisis de las áreas bajo la curva de la figura 1 se puede plantear una relación como la que aparece en la ecuación 5.

$$S_p = n_b S \quad (5)$$

donde: S_p : Área definida (área bajo la curva) por la curva característica de H_p-Q (carga en paralelo-caudal) ($m^3/s \cdot m$); n_b : número de bombas acopladas en paralelo (adim.) y S : Área definida por la curva característica de $H-Q$ ($m^3/s \cdot m$).

$$A_p = A \quad (6)$$

donde: A_p : coeficiente del polinomio representativo de la curva H_p-Q que define el valor de la carga que desarrollan las bombas trabajando en paralelo para caudal cero o válvula cerrada (m).

$$Q_i = \pm \frac{B}{2C} \quad (7)$$

donde: Q_i : caudal de inflexión de la curva característica $H-Q$ (caudal de la bomba para el cual se obtiene la máxima carga) (m^3/s).

$$Q_{iP} = \pm \frac{B_p}{2C_p} \quad (8)$$

donde: Q_{iP} : caudal de inflexión de la curva característica H_p-Q (caudal de la combinación de las bombas en paralelo para el cual se obtiene la máxima carga) (m^3/s) y B_p y C_p : coeficientes del polinomio representativo de la curva H_p-Q que están en función de las pérdidas de carga en el interior de las bombas (s/m^2), (s^2/m^5) respectivamente.

$$Q_{iP} = n_b Q_i \quad (9)$$

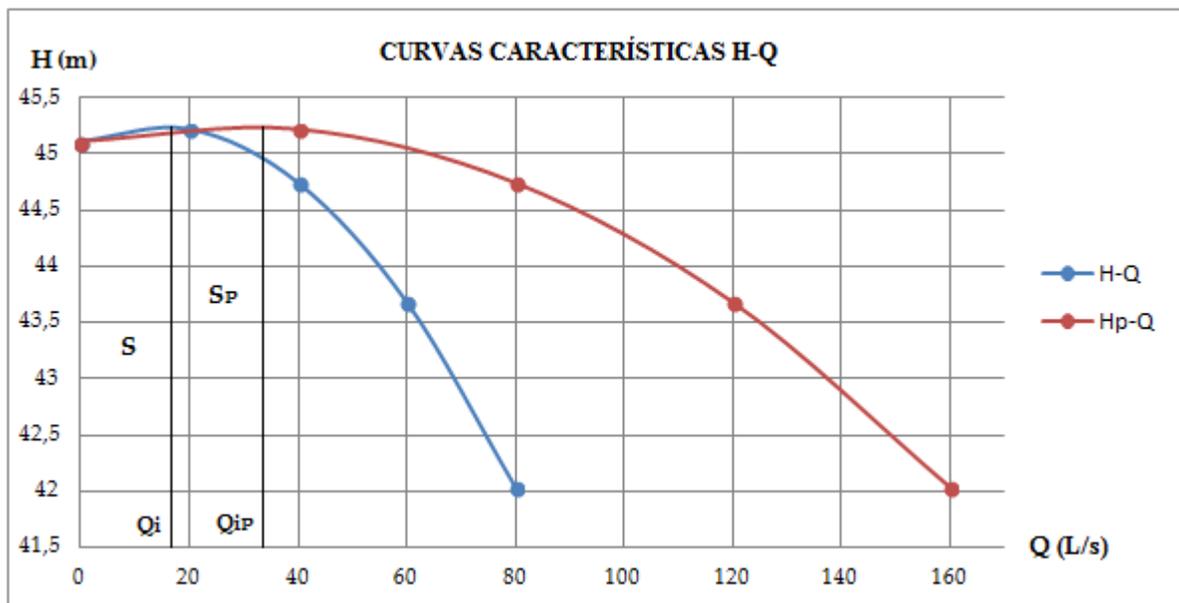


Figura 1. Curva característica de carga-capacidad de una bomba y de dos bombas conectadas en paralelo

Teniendo en cuenta las expresiones (7), (8) y (9) resulta otra forma de expresar el valor de Q_i :

$$Q_i = \pm \frac{B_p}{2n_b C_p} \quad (10)$$

Proceso de integración y obtención de los coeficientes característicos

Integrando las ecuaciones características de $H-Q$ y H_p-Q desde 0 hasta el valor de los gastos Q_i y Q_{iP} respectivamente, se obtienen:

$$S = \int_0^{Q_i} (A \pm BQ - CQ^2) dQ = AQ_i \pm \frac{B}{2} Q_i^2 - \frac{C}{3} Q_i^3 \quad (11)$$

$$S_p = \int_0^{Q_{iP}} (A_p \pm B_p Q - C_p Q^2) dQ = A_p Q_{iP} \pm \frac{B_p}{2} Q_{iP}^2 - \frac{C_p}{3} Q_{iP}^3 \quad (12)$$

Sustituyendo la ecuación (9) en la expresión (12) queda:

$$S_p = A_p n_b Q_i \pm \frac{B_p}{2} n_b^2 Q_i^2 - \frac{C_p}{3} n_b^3 Q_i^3 \quad (13)$$

Igualando la ecuación (13) a la ecuación (5) y arreglando la ecuación resultante se tiene:

$$S = A_p Q_i \pm \frac{B_p}{2} n_b Q_i^2 - \frac{C_p}{3} n_b^2 Q_i^3 \quad (14)$$

Igualando la ecuación (14) a la ecuación (11) se obtiene:

$$A Q_i \pm \frac{B}{2} Q_i^2 - \frac{C}{3} Q_i^3 = A_p Q_i \pm \frac{B_p}{2} n_b Q_i^2 - \frac{C_p}{3} n_b^2 Q_i^3 \quad (15)$$

Teniendo en cuenta la expresión (6) la ecuación (15) se reduce a la siguiente:

$$\pm \frac{B}{2} - \frac{C}{3} Q_i = \pm \frac{B_p}{2} n_b - \frac{C_p}{3} n_b^2 Q_i \quad (16)$$

Introduciendo la ecuación (7) en el miembro izquierdo de la ecuación (16) y la (10) en el miembro derecho de esta, se obtiene finalmente la relación entre los coeficientes B_p y B :

$$B_p = \frac{B}{n_b} \quad (17)$$

Igualando las ecuaciones (7) y (10) e introduciendo la expresión (17) en una de ellas, se encuentra la relación entre los coeficientes C_p y C :

$$C_p = \frac{C}{n_b^2} \quad (18)$$

Obtención de la curva característica de la combinación en paralelo

Obtenidos los coeficientes característicos, se puede plantear la ecuación representativa de la curva H_p - Q para n bombas iguales conectadas en paralelo, a partir de conocer los coeficientes A , B y C correspondientes a una bomba:

$$H_p = A \pm \frac{B}{n_b} Q - \frac{C}{n_b^2} Q^2 \quad (19)$$

En algunas ocasiones con el objetivo de simplificar el proceso manual de ajuste, se acostumbra suprimir el término lineal Q de la curva $H-Q$, ya que representa la parte ascendente de la gráfica, lejos del punto de máxima eficiencia.

Para este caso, el procedimiento de trabajo es el mismo, pero solo se trabajará con las ecuaciones (6) y (18) para la determinación de los coeficientes característicos del polinomio que representa la combinación de las bombas en paralelo.

CURVA EFICIENCIA-CAPACIDAD (η_P-Q)

Conceptos matemáticos de operación

Al igual que en el caso de la curva carga-capacidad para n bombas iguales conectadas en paralelo, existe una relación lineal entre las áreas bajo las curvas (polinomios) de una bomba y la correspondiente a las de n bombas acopladas en paralelo, por lo cual se puede aplicar la misma relación que describe la ecuación (5). En la figura 2 se ilustran los conceptos matemáticos de operación que se abordarán a continuación.

$$S_p = n_b S \quad (5)$$

donde: S_p : Área definida (área bajo la curva) por la curva característica de η_P-Q (eficiencia en paralelo-caudal) (m^3/s) y S : Área definida por la curva característica de $\eta-Q$ (m^3/s).

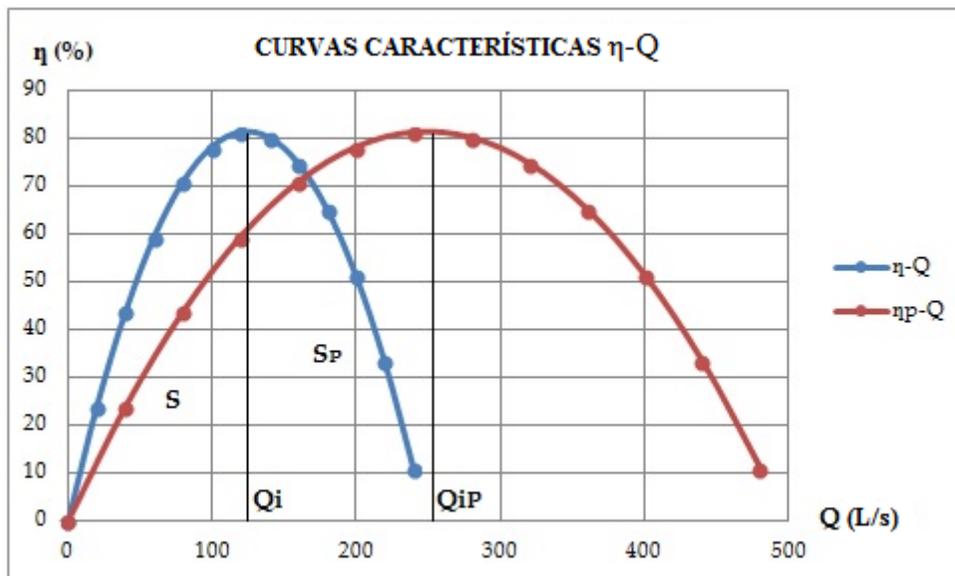


Figura 2. Ejemplos de curvas características de eficiencia-capacidad de una bomba y de dos bombas conectadas en paralelo

$$Q_i = \frac{G}{2H} \quad (20)$$

donde: Q_i : caudal de inflexión de la bomba (caudal de la bomba para el cual se obtiene el máximo rendimiento de la bomba) (m^3/s).

$$Q_{iP} = \frac{G_P}{2H_P} \quad (21)$$

donde: Q_{iP} : caudal de inflexión de la combinación de las bombas en paralelo (caudal de la combinación de las bombas en paralelo para el cual se obtiene la máxima eficiencia del conjunto) (m^3/s) y G_P y H_P : coeficientes del polinomio representativo de la curva η_{P-Q} (s/m^3), (s^2/m^6) respectivamente.

Trabajando con las ecuaciones (20), (21) y (9) resulta otra forma de expresar el valor de Q_i :

$$Q_i = \pm \frac{G_P}{2n_b H_P} \quad (22)$$

Proceso de integración y obtención de los coeficientes característicos

Integrando las ecuaciones $\eta-Q$ y η_{P-Q} desde 0 hasta el valor de los gastos Q_i y Q_{iP} respectivamente, se obtienen:

$$S = \int_0^{Q_i} (GQ - HQ^2) dQ = \frac{G}{2} Q_i^2 - \frac{H}{3} Q_i^3 \quad (23)$$

$$S_P = \int_0^{Q_{iP}} (G_P Q - H_P Q^2) dQ = \frac{G_P}{2} Q_{iP}^2 - \frac{H_P}{3} Q_{iP}^3 \quad (24)$$

Sustituyendo la ecuación (9) en la expresión (24) queda:

$$S_P = \frac{G_P}{2} n_b^2 Q_i^2 - \frac{H_P}{3} n_b^3 Q_i^3 \quad (25)$$

Igualando la ecuación (25) a la ecuación (5) y arreglando la ecuación resultante se tiene:

$$S = \frac{G_P}{2} n_b Q_i^2 - \frac{H_P}{3} n_b^2 Q_i^3 \quad (26)$$

Igualando las ecuaciones (26) y (23) se obtiene la siguiente expresión reducida:

$$\pm \frac{G}{2} - \frac{H}{3} Q_i = \pm \frac{G_P}{2} n_b - \frac{H_P}{3} n_b^2 Q_i \quad (27)$$

Introduciendo la ecuación (20) en el miembro izquierdo de la ecuación (27) y la (22) en el miembro derecho de esta, se obtiene finalmente la relación entre los coeficientes G_P y G :

$$G_p = \frac{G}{n_b} \quad (28)$$

Igualando las ecuaciones (20) y (22) e introduciendo la expresión (28) en una de ellas, se encuentra la relación entre los coeficientes H_p y H :

$$H_p = \frac{H}{n_b^2} \quad (29)$$

Obtención de la curva característica de la combinación en paralelo

Obtenidos estos coeficientes, se puede plantear la ecuación representativa de la curva η_p - Q de n bombas iguales conectadas en paralelo a partir de conocer los coeficientes G y H correspondientes a una bomba:

$$\eta_p = \frac{G}{n_b} Q - \frac{H}{n_b^2} Q^2 \quad (30)$$

CURVA POTENCIA-CAPACIDAD (P_p - Q)

Conceptos matemáticos de operación

En el caso de n bombas iguales conectadas en paralelo existe una relación cuadrática entre las áreas bajo las curvas de Potencia-Capacidad (polinomios) de una bomba y la correspondiente a las de n bombas acopladas en paralelo. Por lo tanto se puede aplicar una relación como la que aparece en la ecuación 31. En la figura 3 se pueden visualizar los conceptos matemáticos de operación para este caso.

$$S_p = n_b^2 S \quad (31)$$

donde: S_p : Área definida bajo la curva característica P_p - Q (potencia en paralelo-caudal) ($\text{m}^3/\text{s} \cdot \text{kW}$) y S : Área definida bajo la curva característica de P - Q ($\text{m}^3/\text{s} \cdot \text{kW}$).

$$D_p = n_b D \quad (32)$$

donde: D_p : coeficiente del polinomio representativo de la curva P_p - Q que define el valor de la potencia conjunta que desarrollan las bombas en caudal cero o válvula cerrada (kW).

$$Q_i = \frac{E}{2F} \quad (33)$$

donde: Q_i : caudal de inflexión de la bomba (caudal de la bomba para el cual se obtiene la máxima potencia) (m^3/s).

$$Q_{iP} = \frac{E_P}{2F_P} \quad (34)$$

donde: Q_{iP} : caudal de inflexión de la combinación de las bombas en paralelo (caudal de las bombas en paralelo para el cual se obtiene la máxima potencia) (m^3/s) y E_P y F_P : coeficientes del polinomio representativo de la curva P_P-Q que están en función de las pérdidas de potencia de la bomba ($s \cdot kW/m^3$), ($s^2 \cdot kW/m^6$) respectivamente.

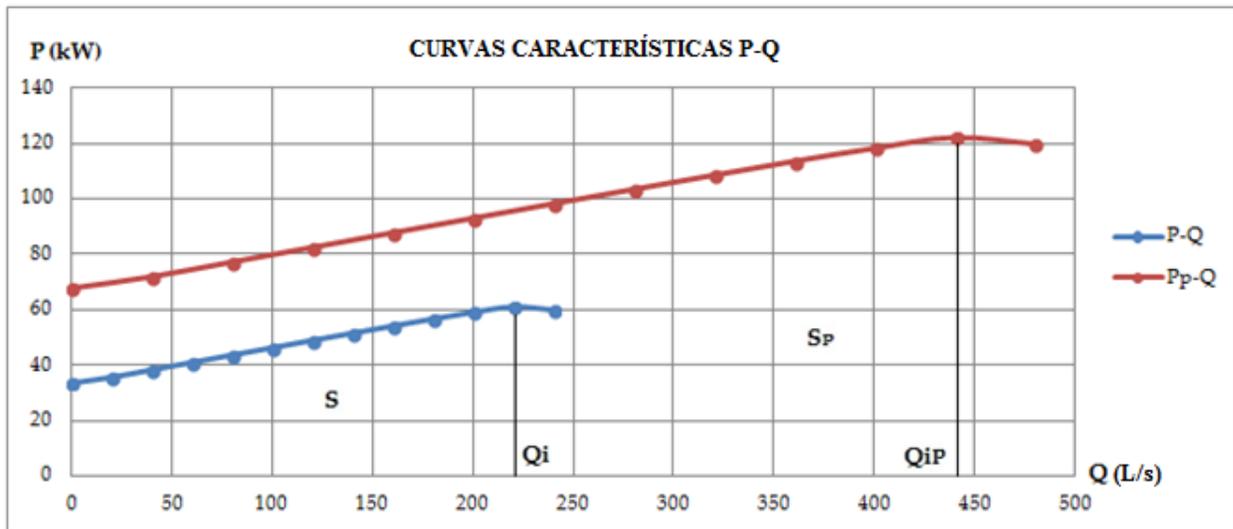


Figura 3. Ejemplos de curvas características de potencia-capacidad de una bomba y de dos bombas conectadas en paralelo

Considerando las ecuaciones (33), (34) y (9) resulta otra forma de expresar el valor de Q_i :

$$Q_i = \frac{E_P}{2n_b F_P} \quad (35)$$

Proceso de integración y obtención de los coeficientes característicos

Integrando las ecuaciones $P-Q$ y P_P-Q desde 0 hasta el valor de los gastos Q_i y Q_{iP} respectivamente, se obtienen:

$$S = \int_0^{Q_i} (D \pm EQ \mp FQ^2) dQ = DQ_i \pm \frac{E}{2} Q_i^2 \mp \frac{F}{3} Q_i^3 \quad (36)$$

$$S_P = \int_0^{Q_{iP}} (D_P \pm E_P Q \mp F_P Q^2) dQ = D_P Q_{iP} \pm \frac{E_P}{2} Q_{iP}^2 \mp \frac{F_P}{3} Q_{iP}^3 \quad (37)$$

Sustituyendo la ecuación (9) en la expresión (37) queda:

$$S_p = D_p n_b Q_i \pm \frac{E_p}{2} n_b^2 Q_i^2 \mp \frac{F_p}{3} n_b^3 Q_i^3 \quad (38)$$

Igualando la ecuación (38) a la ecuación (31) y arreglando la ecuación resultante se tiene:

$$S = D_p \frac{1}{n_b} Q_i \pm \frac{E_p}{2} Q_i^2 \mp \frac{F_p}{3} n_b Q_i^3 \quad (39)$$

Igualando las ecuaciones (39) y (36) se obtiene:

$$D Q_i \pm \frac{E}{2} Q_i^2 \mp \frac{F}{3} Q_i^3 = D_p \frac{1}{n_b} Q_i \pm \frac{E_p}{2} Q_i^2 \mp \frac{F_p}{3} n_b Q_i^3 \quad (40)$$

Teniendo en cuenta la expresión (32) la ecuación (40) se reduce a la siguiente:

$$\pm \frac{E}{2} Q_i^2 \mp \frac{F}{3} Q_i^3 = \pm \frac{E_p}{2} Q_i^2 \mp \frac{F_p}{3} n_b Q_i^3 \quad (41)$$

Introduciendo la ecuación (33) en el miembro izquierdo de la ecuación (41) y la (35) en el miembro derecho de esta, se obtiene finalmente la relación entre los coeficientes E_p y E :

$$E_p = E \quad (42)$$

Igualando las ecuaciones (33) y (35) e introduciendo la expresión (42) en una de ellas, se encuentra la relación entre los coeficientes F_p y F :

$$F_p = \frac{F}{n_b} \quad (43)$$

Obtención de la curva característica de la combinación en paralelo

Obtenidos los coeficientes, se puede plantear entonces la ecuación representativa de la curva P_p - Q de n bombas iguales conectadas en paralelo a partir de conocer los coeficientes D , E y F correspondientes a una bomba:

$$P_p = D n_b \pm E Q \mp \frac{F}{n_b} Q^2 \quad (44)$$

El comportamiento de la $NPSH_r$ de las bombas no cambia cuando son colocadas en serie o en paralelo, ya que por definición es una variable que caracteriza la capacidad de succión de una bomba y por lo tanto es independiente del tipo de acople.

ENFOQUE ADIMENSIONAL PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES CARACTERÍSTICOS DE LA COMBINACIÓN DE BOMBAS EN PARALELO

Las curvas características adimensionales de las bombas rotodinámicas o curvas características tipo, como también se les conoce, permiten visualizar la “forma propia” de las curvas características reales y el comportamiento hidráulico general de estos equipos en función de la velocidad específica (Martínez 2011), (Riaño 2007). Los coeficientes de los polinomios para el caso de las curvas características adimensionales se determinan mediante las siguientes expresiones (Martínez 2011):

$$A_a = \frac{A}{H_d}; \quad B_a = \frac{BQ_d}{H_d}; \quad C_a = \frac{CQ_d^2}{H_d}; \quad D_a = \frac{D}{P_d}; \quad E_a = \frac{EQ_d}{P_d}; \quad F_a = \frac{FQ_d^2}{P_d};$$

$$G_a = \frac{GQ_d}{\eta_d}; \quad H_a = \frac{HQ_d^2}{\eta_d}; \quad I_a = \frac{I}{NPSH_{rd}}; \quad J_a = \frac{JQ_d}{NPSH_{rd}}; \quad K_a = \frac{KQ_d^2}{NPSH_{rd}}$$
(45)

donde: $A_a, B_a, C_a, D_a, E_a, F_a, G_a, H_a, I_a, J_a$ y K_a : coeficientes de los polinomios representativos de las curvas características de diseño de la bomba en su formato adimensional (adim.); Q_d : caudal de diseño de la bomba (m^3/s); H_d : carga de diseño de la bomba (m); η_d : eficiencia de diseño de la bomba (adim.); P_d : potencia de diseño de la bomba (kW) y $NPSH_{rd}$: $NPSH$ requerida de la bomba correspondiente al caudal de diseño de la bomba (m).

El cálculo de la eficiencia adimensional para cualquier punto de trabajo de una bomba, se puede determinar mediante la siguiente ecuación (Martínez 2011):

$$\eta_a = \frac{Q_a H_a}{P_a} \quad (46)$$

donde: η_a : eficiencia adimensional, (adim.); Q_a : caudal adimensional, (adim.); H_a : carga adimensional, (adim.) y P_a : potencia adimensional (adim.).

Los coeficientes de los polinomios representativos de las curvas características adimensionales para n bombas iguales conectadas en paralelo se pueden definir por las siguientes ecuaciones:

$$A_{Pa} = \frac{A_P}{H_{Pd}}; \quad B_{Pa} = \frac{B_P Q_{Pd}}{H_{Pd}}; \quad C_{Pa} = \frac{C_P Q_{Pd}^2}{H_{Pd}}; \quad D_{Pa} = \frac{D_P}{P_{Pd}};$$

$$E_{Pa} = \frac{E_P Q_{Pd}}{P_{Pd}}; \quad F_{Pa} = \frac{F_P Q_{Pd}^2}{P_{Pd}}; \quad G_{Pa} = \frac{G_P Q_{Pd}}{\eta_{Pd}}; \quad H_{Pa} = \frac{H_P Q_{Pd}^2}{\eta_{Pd}}$$
(47)

donde: A_{Pa} , B_{Pa} , C_{Pa} , D_{Pa} , E_{Pa} , F_{Pa} , G_{Pa} y H_{Pa} : coeficientes de los polinomios representativos de las curvas características para la combinación de n bombas iguales en paralelo en su forma adimensional (adim.); Q_{Pd} : caudal de diseño de la curva característica H_P-Q (caudal de la combinación de las n bombas en paralelo para el cual se obtiene la máxima eficiencia del conjunto) (m^3/s); H_{Pd} : carga de diseño de la curva característica H_P-Q (carga de la combinación de las n bombas en paralelo para el cual se obtiene la máxima eficiencia del conjunto) (m); η_{Pd} : eficiencia de diseño de la curva característica η_P-Q (eficiencia máxima de la combinación de las n bombas en paralelo) (adim.) y P_{Pd} : potencia de diseño de la curva característica P_P-Q (potencia de la combinación de las n bombas en paralelo correspondiente a la máxima eficiencia del conjunto) (kW).

Martínez (2011) demostró que las representaciones gráficas de las curvas características adimensionales de una bomba y las resultantes de la combinación de estas en paralelo, en su formato adimensional, son iguales. A partir de esta definición, es posible obtener los coeficientes característicos de las curvas características resultantes de la combinación de bombas rotodinámicas de iguales características hidráulicas en paralelo. Esta demostración se puede expresar por las siguientes igualdades (para el caso de las áreas se realiza la integración desde 0 hasta Q_{ia} y Q_{iPa} según sea el caso):

$$H_a = H_{Pa} \therefore A_a \pm B_a Q_a - C_a Q_a^2 = A_{Pa} \pm B_{Pa} Q_a - C_{Pa} Q_a^2 \therefore S_a = S_{Pa} \quad (48a)$$

$$S_a = S_{Pa} \therefore A_a Q_{ia} \pm \frac{B_a}{2} Q_{ia}^2 - \frac{C_a}{3} Q_{ia}^3 = A_{Pa} Q_{iPa} \pm \frac{B_{Pa}}{2} Q_{iPa}^2 - \frac{C_{Pa}}{3} Q_{iPa}^3 \quad (48b)$$

$$\eta_a = \eta_{Pa} \therefore G_a Q_a - H_a Q_a^2 = G_{Pa} Q_a - H_{Pa} Q_a^2 \therefore S_a = S_{Pa} \quad (49a)$$

$$S_a = S_{Pa} \therefore \frac{G_a}{2} Q_{ia}^2 - \frac{H_a}{3} Q_{ia}^3 = \frac{G_{Pa}}{2} Q_{iPa}^2 - \frac{H_{Pa}}{3} Q_{iPa}^3 \quad (49b)$$

$$P_a = P_{Pa} \therefore D_a \pm E_a Q_a \mp F_a Q_a^2 = D_{Pa} \pm E_{Pa} Q_a \mp F_{Pa} Q_a^2 \therefore S_a = S_{Pa} \quad (50a)$$

$$S_a = S_{Pa} \therefore D_a Q_{ia} \pm \frac{E_a}{2} Q_{ia}^2 \mp \frac{F_a}{3} Q_{ia}^3 = D_{Pa} Q_{iPa} \pm \frac{E_{Pa}}{2} Q_{iPa}^2 \mp \frac{F_{Pa}}{3} Q_{iPa}^3 \quad (50b)$$

donde: H_a : carga adimensional de la bomba (adim.); H_{Pa} : carga adimensional desarrollada por la combinación de las bombas en paralelo (adim.); η_a : eficiencia adimensional de la bomba (adim.); η_{Pa} : eficiencia adimensional de las bombas trabajando en paralelo (adim.); P_a : potencia adimensional de la bomba (adim.); P_{Pa} : potencia adimensional desarrollada por la combinación de las bombas en paralelo (adim.); S_a : Áreas definidas por las curvas características adimensionales de una bomba (adim.); S_{Pa} : Áreas definidas por las curvas características de la combinación de las bombas en paralelo en su forma adimensional (adim.); Q_{ia} : caudal de inflexión adimensional (gasto adimensional de la bomba para el cual se obtiene la máxima carga, potencia y eficiencia adimensional) (adim.) y Q_{iPa} : caudal de inflexión adimensional de la

combinación de las bombas en paralelo (gasto adimensional para el cual se obtiene la máxima carga, potencia y eficiencia adimensional del conjunto) (adim.).

A partir de las ecuaciones (48)-(50) se pueden definir las siguientes equivalencias:

$$A_a = A_{Pa}; B_a = B_{Pa}; C_a = C_{Pa}; D_a = D_{Pa}; E_a = E_{Pa}; F_a = F_{Pa}; G_a = G_{Pa}; H_a = H_{Pa} \quad (51)$$

Aceptando los principios del comportamiento hidráulico del trabajo de bombas en paralelo se tienen las siguientes expresiones:

$$H_{Pd} = H_d; Q_{Pd} = n_b Q_d; \eta_d = \eta_{Pd}; P_{Pd} = n_b P_d \quad (52)$$

Trabajando con las ecuaciones (45), (47), (51) y (52) se procede entonces a determinar las relaciones entre los coeficientes de las curvas de comportamiento hidráulico de una bomba y los representativos de las curvas características del acople en paralelo.

$$A_p = A; B_p = \frac{B}{n_b}; C_p = \frac{C}{n_b^2}; D_p = n_b D; E_p = E; F_p = \frac{F}{n_b}; G_p = \frac{G}{n_b}; H_p = \frac{H}{n_b^2} \quad (53)$$

CONCLUSIONES

- La metodología propuesta, denominada Método de las Áreas, permite determinar los coeficientes de la expresión analítica de la combinación de bombas iguales en paralelo a partir de establecer la relación que existe entre las áreas bajo la curva característica considerada de una bomba y la resultante del acoplamiento n bombas en paralelo.
- Se demuestra que la expresión analítica de la curva característica resultante de la combinación en paralelo está en función de n (número de bombas). Así mismo, se calculan los coeficientes de las curvas de comportamiento hidráulico de una bomba y los representativos de las curvas del acople en paralelo, en el caso de curvas adimensionales.

REFERENCIAS

Cabrera E. (2009). “Ingeniería hidráulica aplicada a los sistemas de distribución de agua”, Editorial Unidad Docente Mecánica de Fluidos, Universidad Politécnica de Valencia, t. 1 y 2, 3^{ra} edición, ISBN 8461339495, Valencia, España.

Fernández P. (2000). “Bombas centrífugas y volumétricas” (monografía), Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética, Universidad de Cantabria, Cantabria, España. Extraído de: http://www.ing.una.py/pdf_material_apoyo/bombas-centrifugas-y-volumentricas.pdf en julio 2017.

Grundfos Pumps (2004). “Pump handbook” (monografía), Copenhagen, Dinamarca. Extraído de: http://net.grundfos.com/doc/webnet/mining/_downloads/pump-handbook.pdf en julio de 2017.

- Martínez Y.** (2011). “Metodología para el diseño hidráulico de las estaciones de bombeo para acueducto”, Tesis de doctorado, Instituto Superior Politécnico “José Antonio Echeverría” (Cujae), La Habana, Cuba.
- Martínez Y. y Riaño F.** (2010). “Características peculiares de la operación de bombas rotodinámicas en paralelo”, *Ciencias Técnicas Agropecuarias*, 19 (2): 38-43, Universidad Agraria de La Habana Fructuoso Rodríguez (UNAH), ISSN 1010-2760, Mayabeque, Cuba.
- Pérez A.** (2006). “Estudio del comportamiento de las bombas rotodinámicas”, Trabajo de diploma, Instituto Superior Politécnico Julio Antonio Mella (ISPJAM), Santiago de Cuba, Cuba.
- Pérez Franco D.** (1999). “Máquinas Hidráulicas Rotodinámicas”, Editorial ENPSES, ISBN 03887-3887, La Habana, Cuba.
- Pérez Franco D.** (2012). “Estaciones de Bombeo”, Editorial Félix Varela, ISBN 978-959-07-1379-8, La Habana, Cuba.
- Riaño F.** (2007). “Estaciones y sistemas de bombeo” (monografía), Centro de Investigaciones Hidráulicas (CIH), Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cujae), La Habana, Cuba.
- Riaño F. y Lorence M.** (1986). “Algunas consideraciones sobre el punto de operación de una bomba y su determinación matemática”, *Ingeniería Hidráulica*, 7 (1): 86-92, ISSN 0253-5696, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cujae), La Habana, Cuba.
- Turiño, I. M.** (1996). “Procedimientos metodológicos para el diagnóstico operacional en sistemas de bombeo mediante modelos matemáticos”, Tesis de doctorado, Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Central de las Villas Marta Abreu (UCLV), Santa Clara, Cuba.