

# Determinación de la transformación del oleaje aplicando un modelo matemático

## INTRODUCCIÓN

En el océano siempre existe algún tipo de onda que pone de manifiesto la propagación de energía mecánica a lo largo de la interfase agua-atmósfera que constituye la superficie del mar. Los mecanismos que aportan esta energía son de diferente naturaleza: viento, perturbaciones meteorológicas, terremotos, atracción planetaria, etc. Como consecuencia de la variabilidad de las características de los distintos mecanismos mencionados, las características de las ondas difieren tanto en su periodo y longitud como en sus mecanismos de control <sup>3</sup>.

A medida que el oleaje se acerca a la costa, el efecto del fondo comienza a hacerse más palpable, a partir de la teoría lineal del oleaje se puede deducir que una onda comienza a sentir la presencia del fondo cuando la profundidad en la que se encuentra es  $h < L/2$ , donde  $L$  es la longitud de la onda y  $h$  la profundidad del perfil. Como consecuencia de esta interacción de las ondas con el fondo el tren de onda u oleaje se transforma existiendo varios de los procesos incluidos en la transformación, fácilmente visibles para un observador en la costa. Estos procesos de transformación se traducen fundamentalmente en: variaciones en la altura de la ola y en la dirección de propagación. Será, por tanto, objetivo fundamental modelar cada uno de estos procesos que constituyen la transformación con el fin de poder determinar cuales son las variaciones inducidas por cada uno de ellos.

A medida que un tren de ondas se aproxima a la costa es posible observar un aumento de la altura y una reducción de su longitud, a este fenómeno se le conoce como *asomeramiento*.

## Resumen / Abstract

*En el presente trabajo se muestra un modelo numérico que permite realizar la transformación del oleaje a partir de las condiciones del oleaje en aguas profundas siguiendo la Teoría Lineal del oleaje, calculando de esta forma la altura de ola ( $H$ ), el setup ( $S$ ) y la longitud de la ola ( $L$ ) transformada. Los valores calculados con el modelo serán empleados para el cálculo del transporte de sedimentos y para el cálculo del cambio del perfil de fondo. El algoritmo numérico propuesto constituye una herramienta computacional muy valiosa para el ingeniero en costas con el objetivo de realizar investigaciones sobre las afectaciones que se pueden producir en la playa para un oleaje dado. La comprobación del modelo propuesto se realiza mediante la comparación con el software profesional SBEACH y SWAN observándose buenos ajustes. El algoritmo numérico propuesto fue desarrollado en el asistente matemático MATLAB.*

**Palabras clave:** Transformación de oleaje, altura de ola, disipación de energía, refracción, difracción, reflexión, índice de rompiente.

*In this work a numerical model is shown which calculates the wave transformation starting from the conditions of the surf in deep waters and following the Linear Theory of waves. In this way, the wave height ( $H$ ), the setup ( $S$ ) and the length ( $L$ ) of the transformed wave are calculated. Calculated values with the model will be employed in calculations of sediment transport and calculation of the change in bottom profile. The proposed numerical algorithm constitutes a very valuable computational tool for the coastal engineer with the objective of carrying out investigations on the affectations that can take place in the beach for given surf. Validation of the proposed model is made by comparison with professional softwares SBEACH and SWAN and good adjustments have been observed.*

**Keywords:** Wave Transformation, wave height, energy dissipation, refraction, diffraction, reflection, breaking index.

Ing. Orlando Peraza Medina. Empresa de Servicios Marítimos. SERMAR s.a Ciudad de La Habana. Cuba. e-mail: madeline.ravelo@infomed.sld.cu

Dr. Lic. David Ernesto Marón Domínguez. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería Civil, ISPJAE. Ciudad de La Habana, Cuba. e-mail: dmaron@civil.cujae.edu.cu

Dr. Ing. Luis Córdova López. Centro de Investigaciones Hidráulicas C.I.H. ISPJAE Ciudad de La Habana. Cuba. e-mail: cordova@tesla.cujae.edu.cu

MSc. Ing. Ronnie Torres Hugues. C.I.H. ISPJAE Ciudad de La Habana. Cuba. e-mail: ronnie@cih.cujae.edu.cu

Como es sabido, para una onda dada, aquella parte del frente que se propaga en aguas mas profundas, viaja con una celeridad mayor que la parte que se encuentra en menor profundidad. Esto da lugar a un giro del frente que se conoce como refracción. La *refracción* puede producirse también por las variaciones en la celeridad inducidas por la presencia de una corriente.

En su propagación hacia profundidades mas reducidas el oleaje encuentra la presencia de barras u otras estructuras naturales y artificiales que dan lugar a un fenómeno llamado *difracción*. Este fenómeno se caracteriza por la cesión lateral de energía perpendicularmente a la dirección de propagación y es el causante de que parte de la energía transportada por la onda se transmita a las zonas de sombra generadas por estos obstáculos. Asociado a la presencia de obstáculos se produce otro fenómeno no menos importante, *la reflexión*, cuyo estudio es de especial importancia en estructuras artificiales y playas.

La disipación en el proceso de la transformación del oleaje se produce por diferentes mecanismos. La *fricción por fondo*, inducida por los esfuerzos tangenciales que se producen en la capa limite mas cercana al fondo da lugar a una importante disipación de energía. Esta disipación es más notable que la que se produce por la *percolación* que tiene lugar en lechos muy permeables.

Sin embargo, el mecanismo disipador de energía por excelencia en aguas poco profundas es la *rotura o rompimiento*. Este fenómeno está totalmente controlado por la profundidad y se produce cuando la razón entre H/h, donde h es la profundidad del perfil, alcanza aproximadamente un valor I<sub>r</sub> llamado índice de rompiente. En este momento el perfil de la ola deja de ser estable y rompe disipando una gran cantidad de energía en forma de turbulencia fundamentalmente.

Los criterios que relacionan la altura de la ola local con la profundidad son muy útiles para determinar el punto a partir del cual se produce el rompimiento de la ola. Estos dos parámetros serán el punto de partida para el modelado de diferentes magnitudes tales como el transporte de sedimentos, corrientes, entre otros. Sin embargo, el proceso de rompimiento en la Naturaleza es mucho más complejo, especialmente si la batimetría es muy irregular. Un mejor conocimiento de los procesos hidrodinámicos a partir del punto de rompiente requiere modelos mas sofisticados capaces de simular los procesos físicos que se producen.

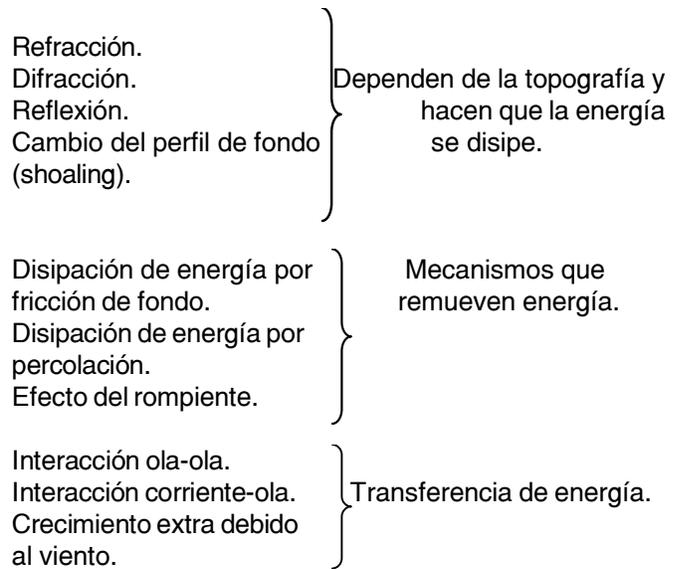
En la literatura pueden encontrarse varios modelos diferentes para reproducir los fenómenos de disipación por rompimiento. Estos modelos se pueden clasificar en función de sus hipótesis de partida tales que:

- ◆ La disipación que se produce es equivalente a la que

tiene lugar en un resalto móvil (bore).

- ◆ La disipación es proporcional a la diferencia entre el flujo de energía local y un flujo de energía estable.
- ◆ La altura de la ola es proporcional a la profundidad local, manteniéndose el coeficiente de proporcionalidad constante en toda la zona de estudio.
- ◆ La disipación es controlada por la presencia de un roller (rodillo) en la superficie<sup>3</sup>.

Los procesos que pueden afectar la altura de la ola en su movimiento hacia la línea de costa pueden resumirse de la siguiente forma:



La ecuación general de transformación del oleaje se puede escribir de la siguiente forma:

$$\underbrace{\frac{\partial E(x,t,f,\theta)}{\partial t}}_A + \underbrace{\nabla [Cg(x,y,f)E(x,y,t,f,\theta)]}_{B} = \underbrace{S_w}_C + \underbrace{S_n}_D + \underbrace{S_D}_E + \underbrace{S_f}_F + \underbrace{S_p}_G \tag{1}$$

donde:

El termino A representa el cambio temporal del espectro.  
 El termino B representa la propagación de la energía del oleaje.

El termino C representa los aportes del viento.

El termino D representa la redistribución de la energía del oleaje entre las diferentes componentes debido a la no linealidad del oleaje.

El termino E representa la disipación de energía debido al fenómeno de rompiente.

El termino F representa las perdidas de energía debido a la fricción de fondo.

El termino G representa las perdidas de energía debido a

la percolación. (*Coastal Engineering Manual*<sup>2</sup>)

## ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL MODELO

### MATEMÁTICO PROPUESTO

En el algoritmo propuesto, se considera solamente el efecto de los términos E y F de la ecuación (1). Las ecuaciones que conforman el modelo numérico del problema de la transformación del oleaje presentado por los autores en el presente trabajo son las siguientes:

Profundidad total (d):

$$d = h + S \quad (2)$$

donde: h es la profundidad de perfil (m) y S es el setup o setback (m)

Longitud de la ola (L):

$$L = L_o \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (3)$$

donde:  $L_o$  es la longitud de la ola en aguas profundas (m).

Factor n:

$$n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\frac{4\pi d}{L}}{\sinh\left(\frac{4\pi d}{L}\right)} \right] \quad (4)$$

Flujo de energía de la ola (F)

$$F = \frac{1}{8} \rho g H^2 n \frac{L}{T} \quad (5)$$

donde:  $\rho$  es la densidad del agua salada, tomada como  $1025 \text{ kg/m}^3$ , g es la aceleración de la gravedad, tomada como  $9.81 \text{ m/s}^2$  y T es el período de la ola (seg).

Ley de Snell:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin \theta}{L} \right) = 0 \quad (6)$$

donde  $\theta$  representa el ángulo de incidencia del oleaje (en grados).

Ecuación de Disipación de Energía

$$\frac{1}{d} \frac{d}{dx} (F \cos \theta) = D \quad (7)$$

donde: D es la disipación de energía que puede tener en cuenta el efecto de la rotura y el efecto de la fricción de

fondo.

Disipación de energía por efecto de rotura de la ola según Larson (1989) (tomado de SBEACH, 1989)<sup>5</sup>:

$$D = \frac{C_r}{d^2} (F - F_s) \quad (8)$$

donde:  $C_r$  es el coeficiente por efecto de rotura (tomado igual a 0.15) (adimensional) y  $F_s$  es el flujo de energía estable de la ola.

Flujo de energía estable de la ola ( $F_s$ )

$$F_s = \frac{1}{8} \rho g (\Gamma d)^2 n \frac{L}{T} \quad (9)$$

donde:  $\Gamma$  es el coeficiente de altura estable de la ola, (tomado como 0.4) (adimensional).

Disipación de energía por efecto de rotura de la ola según Thorton y Gouza (tomado de PETRA 2001)<sup>4</sup>:

$$D = B^3 \frac{\rho g}{4T_o d^2} H^3 \quad (10)$$

donde: B es un parámetro asociado al tipo de rotura (adimensional), tomándose como valor  $B=1$  según lo recomendado por los autores del *Software* PETRA<sup>4</sup>.

Disipación de energía por efecto de fricción de fondo según Batjes (1984)<sup>1</sup>:

$$D = C_f \left( \frac{4\pi^2 \rho}{3dT_o^3 \sinh^3(2\pi d/L)} \right) H^3 \quad (11)$$

donde:  $C_f$  es el coeficiente por efecto de fricción de fondo (tomado igual a 0.01)

Componente de la tensión de radiación ( $S_{xx}$ ) dirigida hacia la costa:

$$S_{xx} = \frac{1}{8} \rho g H^2 \left[ 2n - \frac{1}{2} \right] \quad (12)$$

Ecuación de Momento:

$$\frac{dS_{xx}}{dx} = -\rho g d \frac{dS}{dx} \quad (13)$$

### ALGORITMO NUMÉRICO DE LA TRANSFORMACIÓN DEL OLAJE

Para definir el sistema de referencia la variable independiente x será tomada positiva dirigida desde la costa hacia mar afuera. La variable que representa la altura de la ola (H) será positiva hacia arriba mientras que el perfil del fondo (h) será medido positivo hacia abajo. El setup o setback (S) será medido positivo hacia arriba.

Las tres variables anteriores son medidas desde el Ni-

vel Medio del Mar (NMM) que es tomado como el nivel de referencia inicial, ver Figura No. 1.

La región de estudio o de simulación es representada por el intervalo  $[x_0, x_f]$  donde  $x_0$  denota el punto de inicio del perfil. El extremo de la derecha, denotado por  $x_f$ , representa la distancia final que es la distancia a la que se encuentra la máxima profundidad del perfil  $h_f$  (en metros). De esta forma el punto de rompiente, denotado por  $x_D$ , debe de encontrarse entre  $x_0$  y  $x_f$  de forma que el intervalo que representa la región de estudio  $[x_0, x_f]$  queda dividido en dos zonas fundamentales o subintervalos  $[x_0, x_D]$  y  $[x_D, x_f]$  donde el primer intervalo representa la región que se encuentra antes del punto de rompiente y el segundo intervalo representa la región que se encuentra después del punto de rompiente.

Para el comienzo de los cálculos, se comprueba si la profundidad de la ultima sección del perfil en el extremo derecho  $x_f$  se encuentra ubicada en aguas profundas. Si se cumple la condición de que  $h_f/L_0$  es menor que 0.5 esto quiere decir que la sección de aguas profundas esta a la derecha de  $h_f$  y por tanto un primer calculo es la transformación del oleaje desde la sección de aguas profundas hasta  $h_f$ . Si no se cumple esta condición se toman conocidos los valores de las variables incógnitas del problema en la sección final que coincidan con los valores correspondientes con las condiciones de aguas profundas, es decir,  $H = H_0$ ,  $h = h_f$ ,  $S = 0$  y  $L = L_0$ . En la primera variante, donde se cumple la condición anteriormente mencionada, la altura de la ola calculada en la sección final tiene un valor ligeramente menor que  $H_0$  y aparece un primer valor de  $S$  calculado en esta sección lo cual no ocurre en la segunda variante.

Todos los cálculos se hacen de derecha a izquierda desde el punto  $x_f$  hasta el punto  $x_0$ , es decir, desde la sección final a la derecha hasta la sección inicial ubicada en la costa. A partir de  $x_f$  se toma un incremento o longitud  $\Delta x$  dirigido hacia la costa y se calculan los valores de

las cuatro variables anteriores en el punto o sección correspondiente a la distancia  $x_f - \Delta x$ . Según se indica en la literatura el valor de  $\Delta x$  es del orden de la profundidad.

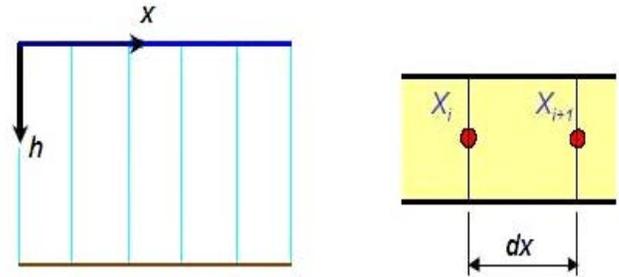


Figura No. 2. Esquema de discretización del modelo

El intervalo o región de estudio se subdivide en  $N$  subintervalos de forma que cada subintervalo se puede expresar de la forma  $[x_i, x_{i+1}]$ . En el punto o sección  $x = x_{i+1}$  se conoce el valor de las cuatro variables o incógnitas del problema y el cálculo se hace en el punto o sección  $x = x_i$ , ver Figura No. 1. A continuación se da una idea general de los pasos que conforman el algoritmo de cálculo que se sigue en el modelo numérico propuesto:

**a)** Se comprueba la condición de aguas profundas ( $h_f/L_0$  menor que 0.5) y si se cumple se efectúa la transformación del oleaje desde la sección aguas profundas hasta la sección final del perfil que corresponde con el nodo  $i = N+1$ . Si no se cumple se comienzan los cálculos el nodo  $i = N+1$ .

**b)** Teniendo en cuenta que el valor de  $h$  es conocido en la sección del nodo  $i$  se propone una aproximación inicial para  $S$  en dicha sección y se calcula el valor de  $d$  según la ecuación (2)

**c)** Se sustituye el valor de  $d$  en la ecuación (3) y se

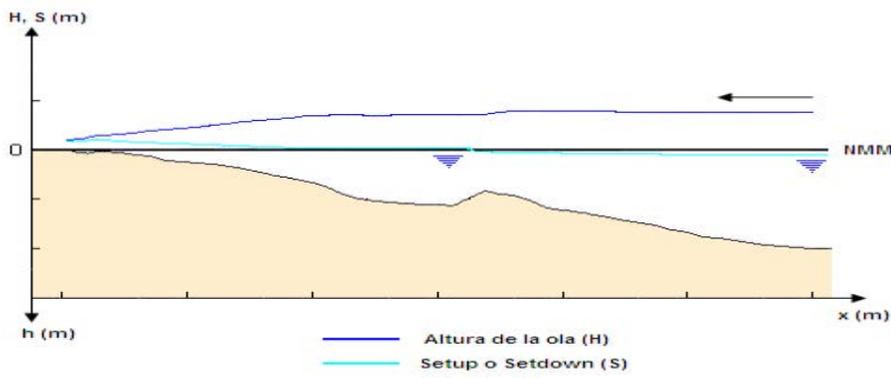


Figura No. 1. Sistema de referencia del Modelo.

resuelve esta última ecuación en términos de L mediante un método numérico utilizado para resolver una ecuación trascendente.

d) Con el valor de L obtenido se calcula n con la ecuación (4).

e) Con el valor de L obtenido se resuelve la ecuación diferencial (6) en términos del ángulo  $\theta$  utilizando el MDF con un esquema de dos puntos.

f) Los valores calculados de  $\theta$  y L se sustituyen en las ecuaciones (5), (8) y (9) y se resuelve la ecuación diferencial (7) en términos de H considerándose, en este caso efecto de rotura según la disipación de energía de Larson. Si se sustituyen las ecuaciones (5) y (10) en (7) se tiene en cuenta la disipación de energía por efecto de rotura de Thorton y Gouza. Si se sustituyen las ecuaciones (5) y (11) en (7) se tiene en cuenta la disipación de energía por efecto de la fricción de fondo según Batjes<sup>1</sup>.

g) Con los valores de  $\theta$ , L y H se sustituyen en la ecuación (12) y con esto se resuelve la ecuación diferencial (13) en términos de S utilizando el MDF con un esquema de dos puntos.

h) Se debe de comprobar un cierto criterio de parada en términos de S de la forma  $|S_i^{(r)} - S_i^{(r-1)}| \leq E$  para un error prefijado E y en caso contrario se comienza de nuevo el cálculo de S desde el inciso a) mediante un proceso iterativo. El supraíndice r denota la iteración y el subíndice i denota la sección.

**EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MODELO**

Se han empleado los siguientes datos para los ejemplos simulados con el modelo, los cuales se mantienen fijos (Tabla 1):

En cada ejemplo se ha escogido para realizar las comparaciones, un perfil del tipo lineal y un perfil con barra, generados arbitrariamente.

Tabla No. 1. Datos fijos de todos los ejemplos:

Nombre del dato.	Valor del dato.
Altura de la ola en aguas profundas Ho(m)	3
Período de la ola en aguas profundas To (seg)	5
Angulo de incidencia del oleaje (en grados).	0
Error en los cálculos en las iteraciones (m)	0.01
Numero de subintervalos en el espacio Nx	100
Pendiente del perfil lineal	0.0083
Pendiente del perfil con barra	0.033

**EJEMPLO1**

Este ejemplo se ha simulado en el modelo teniendo en cuenta la ecuación de disipación de energía por efecto de rompiente de Larson, con un valor de Cr=0.15, Cf=0 (es decir sin considerar efecto de fricción de fondo), los resultados de las simulaciones se muestran en la Figura No.3 y 4. La comparación de esta simulación para cada uno de los perfiles antes mencionados se realiza con el software profesional SBEACH<sup>5</sup>. Los errores absolutos entre los modelos SBEACH y MATLAB se muestran en la Tabla No. 3.

Tabla No. 2. Datos del Ejemplo 1:

Nombre del dato.	Valor del dato.
Índice Rompiente para perfil lineal	0.53
Índice Rompiente para perfil con barra	0.53

**RESULTADOS**

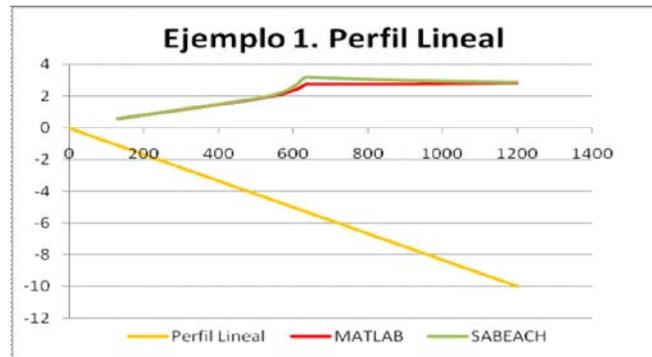


Figura 3. Ejemplo 1. Perfil Lineal

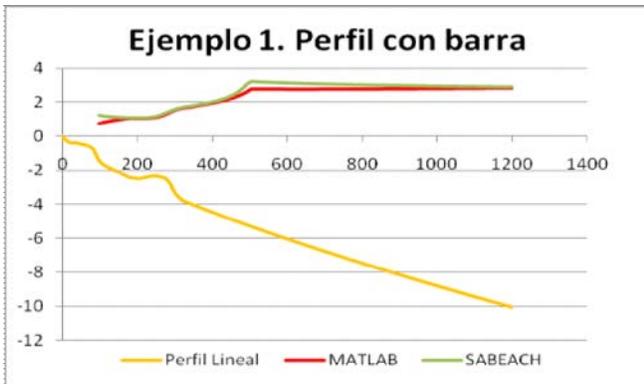


Figura 4. Ejemplo 1. Perfil con barra

Tabla No. 3. Errores entre los modelos SBEACH y MATLAB.

Perfiles	Max. Error absoluto (m)
Perfil Lineal	0.43
Perfil con Barra	0.51

**CONCLUSIONES DEL EJEMPLO**

1. Es importante señalar que la simulación en el modelo SBEACH se ha realizado teniendo en cuenta una simulación de un segundo para considerar en el software únicamente la transformación del oleaje, como un caso permanente, ya que el mismo es un modelo impermanente que simula hasta el cambio del perfil.

2. Para ambos perfiles, fue necesario realizar primeramente las corridas en el modelo SBEACH con el objetivo de obtener el índice de rompiente, el cual como se puede observar en la Tabla No. 2 tiene un valor igual a 0.53, este valor fue el que se fijó en el programa de MATLAB para realizar las comparaciones.

3. Como se puede observar en la Tabla No. 3 y en las Figuras 3 y 4, para ambos perfiles los errores absolutos obtenidos son pequeños si tenemos en cuenta las características de ambos modelos y la variabilidad de los datos de entrada.

**EJEMPLO 2**

Este ejemplo se ha simulado en el modelo teniendo en cuenta la ecuación de disipación de energía por efecto de fricción de fondo de Batjes (1984), los valores de Cf se muestran en la tabla 4 siguiente, los resultados de las simulaciones se muestran en la Figura No.5 y 6. La comparación de esta simulación para cada uno de los perfiles antes mencionados se realiza con el software profesional SWAN2D. Los errores absolutos entre los modelos SWAN2D y MATLAB se muestran en la Tabla No. 5.

Tabla No. 4. Datos del Ejemplo 2:

Nombre del dato.	Valor del dato.
Índice Rompiente para perfil lineal	0.78
Índice Rompiente para perfil con barra	0.78
Coficiente de fricción de fondo, perfil lineal (Cf)	0.07
Coficiente de fricción de fondo, perfil con barra (Cf)	0.01

**RESULTADOS**

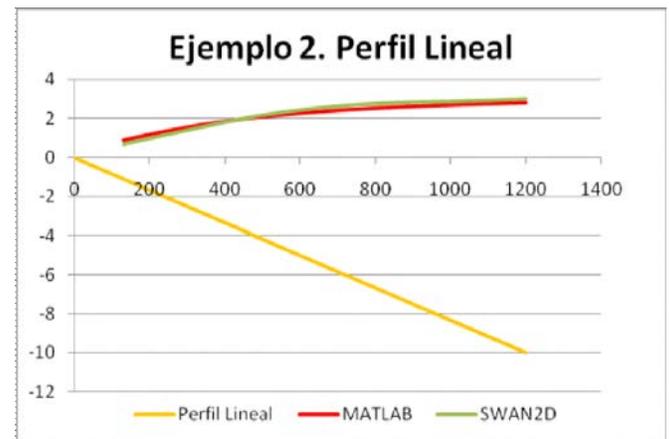


Figura 5. Ejemplo 2. Perfil Lineal

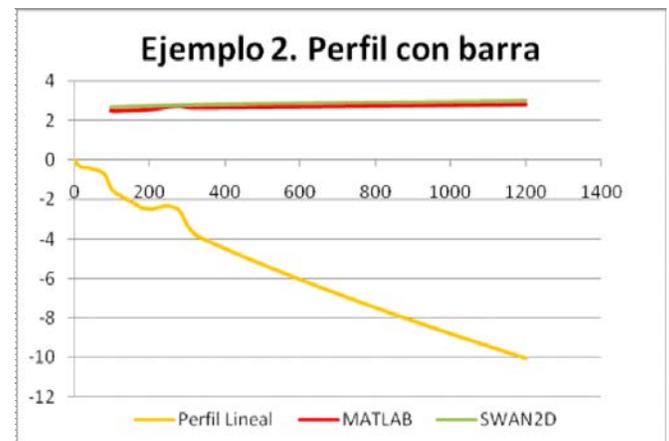


Figura 6. Ejemplo 2. Perfil con barra

Tabla No. 5. Errores entre los modelos SWAN2D y MATLAB.

<i>Perfiles</i>	<i>Max. Error absoluto (m)</i>
<i>Perfil Lineal</i>	<i>0.22</i>
<i>Perfil con Barra</i>	<i>0.19</i>

### CONCLUSIONES DEL EJEMPLO

1. Es importante señalar que para este ejemplo la comparación con el modelo SWAN fue teniendo en cuenta solamente la disipación de energía por efecto de fricción de fondo, por este motivo el valor de Cr se ha considerado en el modelo propuesto igual a cero.

2. Para ambos perfiles, fue necesario realizar primeramente las corridas en el modelo SWAN teniendo en cuenta que no se conoce del mismo el valor del coeficiente de fricción de fondo. Gráficamente se fue ajustando en el modelo propuesto los valores de Cf a utilizar en las simulaciones.

3. Como se puede observar en la Tabla No. 5 y en las Figuras 5 y 6, para ambos perfiles los errores absolutos obtenidos son pequeños si tenemos en cuenta las características de ambos modelos.

### CONCLUSIONES

1. El modelo de transformación del oleaje propuesto por el autor para los ejemplos presentados muestra buena aproximación con los modelos profesionales *SBEACH* y *SWAN2D*, lo que corrobora que es una herramienta válida de aplicación para su utilización por los especialistas de esta área investigativa.

2. Los resultados obtenidos para los ejemplos mostrados se ajustan mejor al software profesional *SWAN2D* en base a la comparación de solo considerar disipación por fricción de fondo.

3. El modelo propuesto tiene la posibilidad de considerar conjuntamente en la disipación de energía el efecto de fricción de fondo y el efecto de rotura de la ola. No se emplea la ecuación de disipación de energía por efecto de rotura de la ola de Thornton y Gouza teniendo en cuenta que ninguno de los dos software profesionales con los que se realizaron las comparaciones incluye dicha ecuación.

4. El modelo propuesto en este trabajo puede ser empleado en investigaciones futuras y además formar parte de un modelo más general que incluya el transporte de sedimentos y el cambio del perfil de la playa.

### REFERENCIAS

- Battjes, 1984.** "Short Waves". International Institute for Hydraulic and Environmental Engineering, The Netherlands.
- Coastal Engineering Manual, Part II, 30 April 2002, "Estimation of Nearshore Waves", EM 1110-2-1100, Part II. 30 April 2002.
- Documento de Referencia. Volumen I. Dinámicas. Universidad de Cantabria, España. Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas. Diciembre de 2000.
- PETRA, 2001** "PETRA: Modelo de evolución del perfil transversal de la playa"; Versión: 3.0. 2001. Manual de Referencia. Universidad de Cantabria, España. Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas.
- SBEACH, 1989.** "SBEACH: Numerical model for simulating storm-induced beach change"; Version: 2.0. 1989. U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Coastal Engineering Research Center, Vicksburg, MS.
- SWAN, 2009.** "SWAN Model: Cycle III version 40.72AB". Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Geosciences Environmental Fluid Mechanics Section, The Netherlands.

Recibido: enero del 2008  
Aprobado: febrero del 2008