

Deducción analítica de las curvas características de las bombas rotodinámicas en serie

Yaset Martínez Valdés

email: yaset@cih.cujae.edu.cu

Profesor Auxiliar, Departamento de Ingeniería Hidráulica, Centro de Investigaciones Hidráulicas (CIH), Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría (Cujae), Marianao, La Habana, Cuba.

Félix Riaño Valle

email: riano@tesla.cujae.edu.cu

Profesor Titular, Vicerrectoría Docente, Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría (Cujae), Marianao, La Habana, Cuba.

RESUMEN

En este artículo se presenta una metodología para la determinación de los coeficientes de la expresión matemática de cada una de las curvas características resultantes de colocar bombas rotodinámicas iguales en serie, partiendo de conocer las de una de ellas. La metodología propuesta está basada en la relación directa que existe entre las áreas bajo las curvas (polinomios) de una bomba y la correspondiente al caso en cuestión (n bombas en serie). Por esta razón, el procedimiento se ha denominado Método de las Áreas. El objetivo de la misma es determinar los coeficientes de las curvas características resultantes de la combinación de bombas rotodinámicas en serie, así como proporcionar una herramienta para conocer el procedimiento de obtención de dichos coeficientes característicos.

Palabras clave: bombas en serie, bombas rotodinámicas, coeficientes característicos, curvas características.

Analytical deduction of the characteristic curves of rotodynamic pumps in series

ABSTRACT

This paper presents a methodology for the determination of the coefficients of the mathematical expression of each of the characteristic curves resulting from the placement of rotodynamic pumps in series, starting from knowing the curves of one of them. The proposed methodology is based on the direct relationship that exists between the areas under the curves (polynomials) of a pump and the one corresponding to the case in question (n pumps in series). For this reason, the procedure has been called the Area Method. The aim of this procedure is to determine the coefficients of the characteristic curves resulting from the combination of rotodynamic pumps in series, as well as to provide a tool for knowing the method of obtaining of such characteristic coefficients.

Keywords: pumps in series, rotodynamics pumps, characteristic coefficients, characteristic curves.

INTRODUCCIÓN

En distintas aplicaciones de las bombas rotodinámicas ocurren situaciones que requieren analizar diferentes opciones de operación, para satisfacer las necesidades que se presenten. Debido a esto, se apela en ocasiones a cambiar la velocidad de rotación de una bomba, operarla a velocidad variable, recortarle el impelente, combinarlas en paralelo o en serie, entre otras posibilidades, que permitirán resolver el problema en cuestión (Martínez 2011), (Pérez Franco 2012).

Tradicionalmente la información relacionada con el comportamiento de las bombas rotodinámicas ha sido brindada de forma gráfica, mediante las conocidas curvas características de Carga-Capacidad, Eficiencia-Capacidad, Potencia-Capacidad y NPSH_r-Capacidad.

Sin embargo, hace ya algunos años, estimulados por la extensión del uso de la computación, se comienza a generalizar el empleo de ecuaciones matemáticas en sustitución de la forma gráfica para brindar esta información y estudiar el comportamiento de los sistemas de bombeo (Riaño y Lorence 1986). De esta manera, resulta imprescindible encontrar la expresión matemática de las curvas características de las bombas rotodinámicas a partir de los gráficos proporcionados por el fabricante, ya que estos raramente brindan la información analítica (Pérez 2006).

Para obtener las ecuaciones que representan las curvas características de las bombas se seleccionan una serie de puntos representativos de estas y se aplica el Método de los Mínimos Cuadrados para encontrar las expresiones matemáticas correspondientes (Pérez Franco 2012).

Las ecuaciones que modelan las cuatro curvas características de diseño de las bombas rotodinámicas son (Turiño 1996), (Pérez Franco 1999), (Martínez 2009), (Martínez 2011):

$$\text{Curva carga-capacidad, } (H-Q): \quad H = A \pm BQ - CQ^2 \quad (1)$$

donde: H : carga que desarrolla la bomba (m); A : coeficiente del polinomio representativo de la curva $H-Q$ que define el valor de la carga que desarrolla la bomba para caudal cero o válvula cerrada (m); B y C : coeficientes del polinomio representativo de la curva $H-Q$ que están en función de las pérdidas de carga en el interior de la bomba (s/m^2), (s^2/m^5) respectivamente y Q : caudal impulsado por la bomba (m^3/s).

$$\text{Curva potencia-capacidad, } (P-Q): \quad P = D \pm EQ \mp FQ^2 \quad (2)$$

donde: P : potencia absorbida por la bomba (kW); D : coeficiente del polinomio representativo de la curva $P-Q$, que define el valor de la potencia consumida por la bomba para caudal cero (kW). E y F : coeficientes del polinomio representativo de la curva $P-Q$ dependientes de las pérdidas de potencia de la bomba ($s \cdot kW/m^3$), ($s^2 \cdot kW/m^6$) respectivamente.

$$\text{Curva eficiencia-capacidad, } (\eta-Q): \quad \eta = GQ - HQ^2 \quad (3)$$

donde: η : eficiencia de la bomba (adim.) y G y H : coeficientes del polinomio representativo de la curva $\eta-Q$ (s/m^3), (s^2/m^6) respectivamente.

$$\text{Curva } NPSH_r\text{-capacidad, } (NPSH_r-Q): \quad NPSH_r = I - JQ + KQ^2 \quad (4)$$

donde: $NPSH_r$: $NPSH$ requerida por la bomba (m) e I , J y K : coeficientes del polinomio representativo de la curva $NPSH_r-Q$ que describen las características de succión de la bomba (m), (s/m²), (s²/m⁵) respectivamente.

También son conocidas las expresiones analíticas de las curvas características resultantes del acoplamiento de las bombas rotodinámicas de igual comportamiento hidráulico en serie y en paralelo, así como aquellas que se derivan de la adecuación de las curvas características de las bombas rotodinámicas a nuevas condiciones de operación (Cabrera 2009). Sin embargo, en la literatura consultada sobre el tema, no se dispone de todas las expresiones analíticas al respecto y de aquellas que existen, no se define cómo fueron obtenidas, lo cual limita el futuro trabajo con estas.

DESARROLLO

En este trabajo se presenta una metodología analítica propuesta por los autores denominada Método de las Áreas. El objetivo de la misma es determinar los coeficientes de las curvas características resultantes de la combinación de bombas rotodinámicas de iguales características hidráulicas en serie, así como proporcionar una herramienta para conocer el procedimiento de obtención de dichos coeficientes característicos.

La metodología propuesta se basa en el principio de establecer la relación directa que existe, entre las áreas definidas bajo las curvas características de la bombas rotodinámicas y la resultante de su acoplamiento con otras iguales en serie, apoyado en ciertos conceptos matemáticos de operación que caracterizan las condiciones del sistema hidráulico de la combinación. En este trabajo se desarrolla el procedimiento analítico que permite calcular los coeficientes de las expresiones analíticas de las curvas características resultantes de colocar n bombas en serie.

Acoplamiento de bombas rotodinámicas en serie

Cuando se realiza el acoplamiento de bombas rotodinámicas en serie, la descarga de una bomba constituye la aspiración de la siguiente, por lo que el caudal bombeado será el mismo mientras que las cargas suministradas deberán sumarse. Los principios de operación de las bombas trabajando en serie son (Fernández 2000), (Pérez Franco 2012):

1. Se suman las cargas para caudales iguales
2. Se suman las potencias para caudales iguales
3. Cuando las bombas son de iguales características hidráulicas, la eficiencia de la combinación será la misma que la correspondiente a una bomba. En el caso de que las bombas sean diferentes, la eficiencia de la combinación se calcula partiendo de la potencia total para caudales iguales.

Un caso particular de acoplamiento de bombas en serie lo constituyen las bombas multicelulares o de varias etapas. En este caso, los n rodets que están montados dentro del

cuerpo de la bomba son todos iguales por lo cual una bomba multietapa sería el equivalente a n bombas iguales conectadas en serie (KSB Pumps 2005), (Grundfos Pumps 2004).

Teniendo en cuenta estos principios del comportamiento hidráulico de la combinación de bombas en serie, se pueden entender mejor los conceptos matemáticos de operación que se describen a continuación para cada una de las curvas características.

CURVA CARGA-CAPACIDAD (H_S-Q)

Conceptos matemáticos de operación

Para el caso de n bombas iguales conectadas en serie, existe una relación lineal entre las áreas bajo las curvas (polinomios) de una bomba y la correspondiente a las de n bombas acopladas en serie. Del análisis de las áreas bajo la curva de la figura 1 se puede plantear una relación como la que aparece en la ecuación (5).

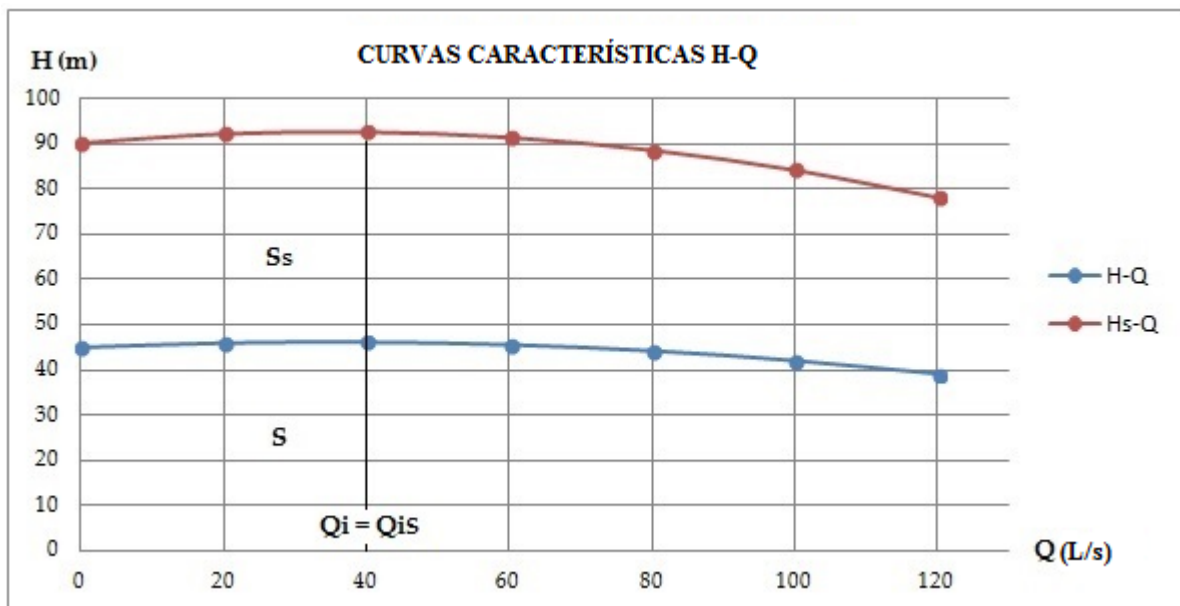


Figura 1. Ejemplos de curvas características de carga-capacidad de una bomba y de dos bombas conectadas en serie

$$S_s = n_b S \quad (5)$$

donde: S_s : área definida bajo la curva característica de H_s-Q (carga en serie-caudal) ($m^3/s \cdot m$),
 S : área definida por la curva característica de $H-Q$ ($m^3/s \cdot m$) y $n_b = n$.

$$A_s = n_b A \quad (6)$$

donde: A_s : coeficiente del polinomio representativo de la curva H_s-Q que define el valor de la carga que desarrollan las bombas trabajando en serie para caudal cero o válvula cerrada (m).

$$Q_i = \pm \frac{B}{2C} \quad (7)$$

donde: Q_i : caudal de inflexión de la curva característica $H-Q$ (caudal de la bomba para el cual se obtiene la máxima carga) (m^3/s).

$$Q_{iS} = \pm \frac{B_S}{2C_S} \quad (8)$$

donde: Q_{iS} : caudal de inflexión de la combinación de las bombas en serie (caudal de la combinación de las bombas en serie para el cual se obtiene la máxima carga) (m^3/s) y B_S y C_S : coeficientes del polinomio representativo de la curva H_S-Q que están en función de las pérdidas de carga en el interior de las bombas (s/m^2), (s^2/m^5) respectivamente.

$$Q_{iS} = Q_i \quad (9)$$

Proceso de integración y obtención de los coeficientes característicos

Integrando las ecuaciones $H-Q$ y H_S-Q desde 0 hasta el valor de los gastos Q_i y Q_{iS} respectivamente, se obtienen:

$$S = \int_0^{Q_i} (A \pm BQ - CQ^2) dQ = AQ_i \pm \frac{B}{2} Q_i^2 - \frac{C}{3} Q_i^3 \quad (10)$$

$$S_S = \int_0^{Q_{iS}} (A_S \pm B_S Q - C_S Q^2) dQ = A_S Q_{iS} \pm \frac{B_S}{2} Q_{iS}^2 - \frac{C_S}{3} Q_{iS}^3 \quad (11)$$

Sustituyendo la ecuación (9) en la expresión (11) queda:

$$S_S = A_S Q_i \pm \frac{B_S}{2} Q_i^2 - \frac{C_S}{3} Q_i^3 \quad (12)$$

Igualando la ecuación (12) a la ecuación (5) y arreglando la ecuación resultante se tiene:

$$S = \frac{A_S}{n_b} Q_i \pm \frac{B_S}{2n_b} Q_i^2 - \frac{C_S}{3n_b} Q_i^3 \quad (13)$$

Igualando la ecuación (13) a la ecuación (10) se obtiene:

$$AQ_i \pm \frac{B}{2} Q_i^2 - \frac{C}{3} Q_i^3 = \frac{A_S}{n_b} Q_i \pm \frac{B_S}{2n_b} Q_i^2 - \frac{C_S}{3n_b} Q_i^3 \quad (14)$$

Teniendo en cuenta la expresión (6), la ecuación (14) se transforma en la siguiente:

$$\pm \frac{B}{2} - \frac{C}{3} Q_i = \pm \frac{B_s}{2n_b} - \frac{C_s}{3n_b} Q_i \quad (15)$$

A partir de la definición planteada en (9) se introducen las ecuaciones (7) y (8) en el miembro izquierdo y derecho de la ecuación (15) respectivamente, obteniéndose la relación entre los coeficientes B_s y B :

$$B_s = n_b B \quad (16)$$

Igualando las ecuaciones (7) y (8) e introduciendo la expresión (16) en una de ellas, se encuentra la relación entre los coeficientes C_s y C :

$$C_s = n_b C \quad (17)$$

Obtención de la curva característica de la combinación en serie

Obtenidos estos coeficientes, se puede plantear la ecuación representativa de la curva H_s-Q de n bombas iguales conectadas en serie a partir de conocer los coeficientes A , B y C de una bomba:

$$H_s = An_b \pm Bn_b Q - Cn_b Q^2 = n_b (A \pm BQ - CQ^2) \quad (18)$$

Al igual que para el caso de bombas trabajando en paralelo, cuando se presente el caso de $B = 0$, solo se trabajará con las ecuaciones (6) y (17) para la determinación de los coeficientes característicos del polinomio que representa la combinación de las bombas en serie.

CURVA EFICIENCIA-CAPACIDAD (η_s-Q)

Conceptos matemáticos de operación

Como las curvas características de una bomba y la del sistema en serie son iguales, resulta evidente que las expresiones matemáticas y por tanto, sus coeficientes, son los mismos. No obstante, se ha decidido desarrollar todo el proceso de cálculo.

De acuerdo con lo expresado anteriormente, entonces, el área bajo el polinomio que caracteriza la curva eficiencia-capacidad para n bombas iguales conectadas en serie es igual a la que le corresponde a una sola bomba, por lo que puede plantearse una relación como la expresada en (19), la cual resulta evidente como se aprecia en la figura 2.

$$S_s = S \quad (19)$$

donde: S_s : área definida bajo la curva característica de η_s-Q (eficiencia en serie-caudal) (m^3/s)
y S : área definida por la curva característica de $\eta-Q$ (m^3/s).

$$Q_{is} = \frac{G_s}{2H_s} \quad (20)$$

donde: Q_{is} : caudal de inflexión de la combinación de las bombas en serie (caudal de la combinación de las bombas en serie para el cual se obtiene la máxima eficiencia del conjunto) (m^3/s) y G_s y H_s : coeficientes del polinomio representativo de la curva η_s-Q (s/m^3), (s^2/m^6) respectivamente.

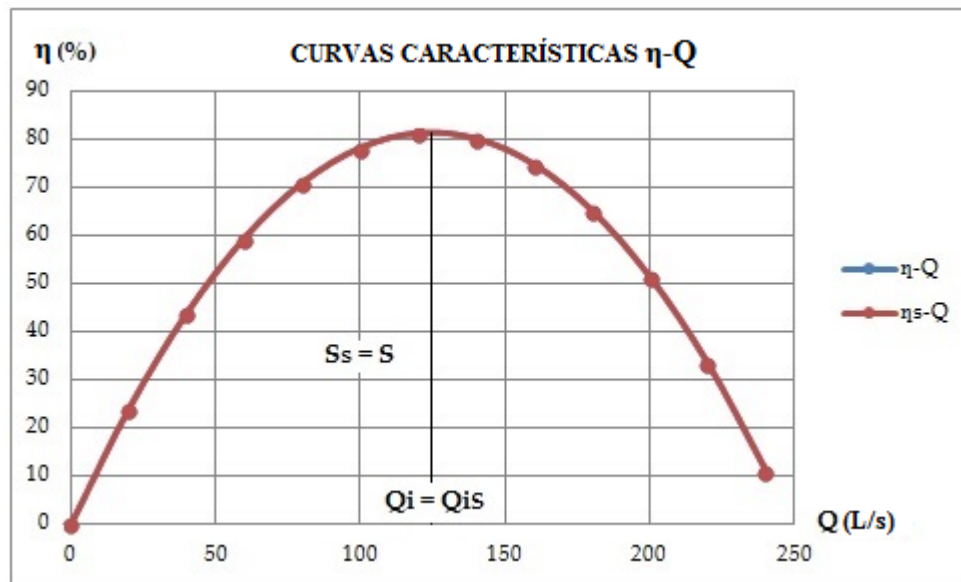


Figura 2. Ejemplos de curvas características de eficiencia-capacidad de una bomba y de dos bombas conectadas en serie

Proceso de integración y obtención de los coeficientes característicos

Integrando las ecuaciones $\eta-Q$ y η_s-Q desde 0 hasta el valor de los gastos Q_i y Q_{is} respectivamente, se obtienen:

$$S = \int_0^{Q_i} (GQ - HQ^2) dQ = \frac{G}{2} Q_i^2 - \frac{H}{3} Q_i^3 \quad (21)$$

$$S_s = \int_0^{Q_{is}} (G_s Q - H_s Q^2) dQ = \frac{G_s}{2} Q_{is}^2 - \frac{H_s}{3} Q_{is}^3 \quad (22)$$

Sustituyendo la ecuación (9) en la expresión (22) queda:

$$S_s = \frac{G_s}{2} Q_i^2 - \frac{H_s}{3} Q_i^3 \quad (23)$$

Igualando la ecuación (23) a la ecuación (19) se tiene:

$$S = \frac{G_s}{2} Q_i^2 - \frac{H_s}{3} Q_i^3 \quad (24)$$

Igualando las ecuaciones (21) y (24) se puede deducir que:

$$G_s = G \quad (25)$$

$$H_s = H \quad (26)$$

Obtención de la curva característica de la combinación en serie

Deducidos estos coeficientes, la ecuación representativa de la curva η_s - Q para n bombas iguales conectadas en serie, se determina a partir de conocer los coeficientes G y H de una bomba:

$$\eta_s = GQ - HQ^2 \quad (27)$$

CURVA POTENCIA-CAPACIDAD (P_s - Q)

Conceptos de operación matemáticos

Para el caso de n bombas iguales conectadas en serie, existe una relación lineal entre las áreas bajo las curvas (polinomios) de una bomba y la correspondiente a las de n bombas acopladas en serie, por lo cual se puede adoptar la ecuación (5). En la figura 3 se pueden visualizar los conceptos de operación matemáticos que se abordan a continuación.

$$S_s = n_b S \quad (5)$$

donde: S_s : área definida bajo la curva característica de P_s - Q (potencia en serie-caudal) ($\text{m}^3/\text{s} \cdot \text{kW}$) y S : área definida por la curva característica de P - Q ($\text{m}^3/\text{s} \cdot \text{kW}$).

$$D_s = n_b D \quad (28)$$

donde: D_s : coeficiente del polinomio representativo de la curva P_s - Q que define el valor de la potencia combinada que desarrollan las bombas para caudal cero o válvula cerrada (kW).

$$Q_i = \frac{E}{2F} \quad (29)$$

donde: Q_i : caudal de inflexión de la bomba (caudal de la bomba para el cual se obtiene la máxima potencia) (m^3/s).

$$Q_{is} = \frac{E_s}{2F_s} \quad (30)$$

donde: Q_{is} : caudal de inflexión de la combinación de las bombas en serie (caudal de la combinación de las bombas en serie para el cual se obtiene la máxima potencia para la combinación) (m^3/s) y E_s y F_s : coeficientes del polinomio representativo de la curva P_s-Q que están en función de las pérdidas de potencia de la bomba ($\text{s} \cdot \text{kW}/\text{m}^3$), ($\text{s}^2 \cdot \text{kW}/\text{m}^6$) respectivamente.

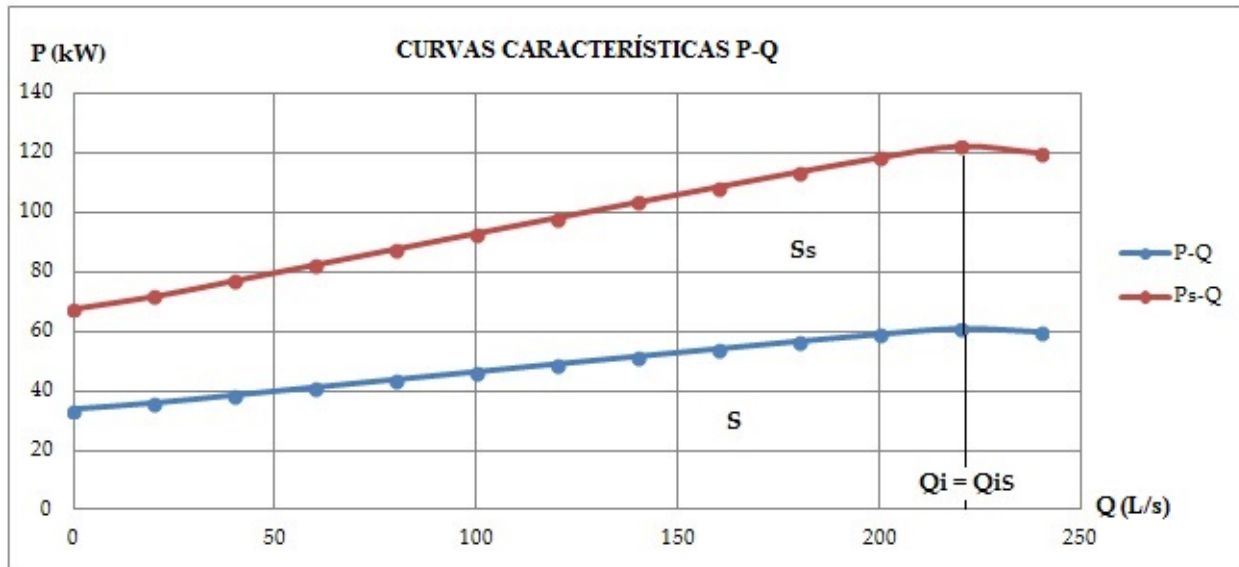


Figura 3. Ejemplos de curvas características de potencia-capacidad de una bomba y de dos bombas conectadas en serie

Proceso de integración y obtención de los coeficientes característicos

Integrando las ecuaciones $P-Q$ y P_s-Q desde 0 hasta el valor de los gastos Q_i y Q_{is} respectivamente, se obtienen:

$$S = \int_0^{Q_i} (D \pm EQ \mp FQ^2) dQ = DQ_i \pm \frac{E}{2} Q_i^2 \mp \frac{F}{3} Q_i^3 \quad (31)$$

$$S_s = \int_0^{Q_{is}} (D_s \pm E_s Q \mp F_s Q^2) dQ = D_s Q_{is} \pm \frac{E_s}{2} Q_{is}^2 \mp \frac{F_s}{3} Q_{is}^3 \quad (32)$$

Sustituyendo la ecuación (9) en la expresión (32) queda:

$$S_s = D_s Q_i \pm \frac{E_s}{2} Q_i^2 \mp \frac{F_s}{3} Q_i^3 \quad (33)$$

Igualando la ecuación (33) a la ecuación (5) se tiene:

$$S = D_S \frac{1}{n_b} Q_i \pm \frac{E_S}{2n_b} Q_i^2 \mp \frac{F_S}{3n_b} Q_i^3 \quad (34)$$

Igualando las ecuaciones (31) y (34) se obtiene:

$$DQ_i \pm \frac{E}{2} Q_i^2 \mp \frac{F}{3} Q_i^3 = D_S \frac{1}{n_b} Q_i \pm \frac{E_S}{2n_b} Q_i^2 \mp \frac{F_S}{3n_b} Q_i^3 \quad (35)$$

Teniendo en cuenta la expresión (28), la ecuación (35) se reduce a la siguiente:

$$\pm \frac{E}{2} Q_i^2 \mp \frac{F}{3} Q_i^3 = \pm \frac{E_S}{2n_b} Q_i^2 \mp \frac{F_S}{3n_b} Q_i^3 \quad (36)$$

A partir de la definición planteada en (9) se introduce la ecuación (29) en el miembro izquierdo de la ecuación (36) y la (30) en el miembro derecho de esta, obteniéndose la relación entre los coeficientes E_S y E :

$$E_S = n_b E \quad (37)$$

Igualando las ecuaciones (29) y (30) e introduciendo la expresión (37) en una de ellas, se encuentra la relación entre los coeficientes F_S y F :

$$F_S = n_b F \quad (38)$$

Obtención de la curva característica de la combinación

Obtenidos estos coeficientes, se puede plantear entonces la ecuación representativa de la curva P_S - Q de n bombas iguales conectadas en serie a partir de conocer los coeficientes D , E y F de una bomba:

$$P_S = Dn_b \pm En_b Q \mp Fn_b Q^2 = n_b (D \pm EQ \mp FQ^2) \quad (39)$$

El comportamiento de la $NPSH_r$ de las bombas no cambia cuando son colocadas en serie o en paralelo, ya que por definición es una variable que caracteriza la capacidad de succión de una bomba y por lo tanto es independiente del tipo de acoplamiento.

ENFOQUE ADIMENSIONAL PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES CARACTERÍSTICOS DE LA COMBINACIÓN DE BOMBAS EN SERIE

Las curvas características adimensionales de las bombas rotodinámicas o curvas características tipo como también se les conoce, permiten visualizar la “forma propia” de las curvas características reales y el comportamiento hidráulico general de estos equipos en función de la velocidad específica (Martínez 2011).

Los coeficientes característicos de los polinomios para el caso de las curvas características adimensionales se determinan mediante las siguientes expresiones (Martínez 2011):

$$\begin{aligned} A_a &= \frac{A}{H_d}; & B_a &= \frac{BQ_d}{H_d}; & C_a &= \frac{CQ_d^2}{H_d}; & D_a &= \frac{D}{P_d}; & E_a &= \frac{EQ_d}{P_d}; & F_a &= \frac{FQ_d^2}{P_d}; \\ G_a &= \frac{GQ_d}{\eta_d}; & H_a &= \frac{HQ_d^2}{\eta_d}; & I_a &= \frac{I}{NPSH_{rd}}; & J_a &= \frac{JQ_d}{NPSH_{rd}}; & K_a &= \frac{KQ_d^2}{NPSH_{rd}} \end{aligned} \quad (40)$$

donde: $A_a, B_a, C_a, D_a, E_a, F_a, G_a, H_a, I_a, J_a$ y K_a : coeficientes de los polinomios representativos de las curvas características de diseño de la bomba en su formato adimensional (adim); Q_d : caudal de diseño de la bomba, (m^3/s); H_d : carga de diseño de la bomba (m); η_d : eficiencia de diseño de la bomba (adim.); P_d : potencia de diseño de la bomba (kW) y $NPSH_{rd}$: $NPSH$ requerida de la bomba correspondiente al caudal de diseño de la bomba (m).

El cálculo de la eficiencia adimensional para cualquier punto de trabajo de una bomba, se puede determinar mediante la siguiente ecuación (Martínez 2011):

$$\eta_a = \frac{Q_a H_a}{P_a} \quad (41)$$

donde: η_a : eficiencia adimensional (adim.); Q_a : caudal adimensional (adim.); H_a : carga adimensional (adim.) y P_a : potencia adimensional (adim.).

Los coeficientes característicos de los polinomios representativos de las curvas características adimensionales para n bombas iguales conectadas en serie se pueden definir por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_{Sa} &= \frac{A_S}{H_{Sd}}; & B_{Sa} &= \frac{B_S Q_{Sd}}{H_{Sd}}; & C_{Sa} &= \frac{C_S Q_{Sd}^2}{H_{Sd}}; & D_{Sa} &= \frac{D_S}{P_{Sd}}; \\ E_{Sa} &= \frac{E_S Q_{Sd}}{P_{Sd}}; & F_{Sa} &= \frac{F_S Q_{Sd}^2}{P_{Sd}}; & G_{Sa} &= \frac{G_S Q_{Sd}}{\eta_{Sd}}; & H_{Sa} &= \frac{H_S Q_{Sd}^2}{\eta_{Sd}} \end{aligned} \quad (42)$$

donde: $A_{Sa}, B_{Sa}, C_{Sa}, D_{Sa}, E_{Sa}, F_{Sa}, G_{Sa}$ y H_{Sa} : coeficientes característicos de los polinomios representativos de las curvas características para la combinación de n bombas iguales en serie en su forma adimensional (adim.); Q_{Sd} : caudal de diseño de la curva característica H_S - Q (caudal de la combinación de las n bombas en serie para el cual se obtiene la máxima eficiencia del conjunto) (m^3/s); H_{Sd} : carga de diseño de la curva característica H_S - Q (carga de la combinación de las n bombas en serie para el cual se obtiene la máxima eficiencia del conjunto) (m); η_{Sd} : eficiencia de diseño de la curva característica

η_s - Q (eficiencia máxima de la combinación de las n bombas en serie) (adim.) y P_{Sa} : potencia de diseño de la curva característica P_s - Q (potencia de la combinación de las n bombas en serie correspondiente a la máxima eficiencia del conjunto) (kW).

Martínez (2011) demostró que las representaciones gráficas de las curvas características adimensionales de una bomba y las resultantes de la combinación de estas en serie, en su formato adimensional, son iguales.

A partir de esta definición, es posible obtener los coeficientes característicos de las curvas representativas de la combinación de bombas rotodinámicas de iguales características hidráulicas en serie. Esta demostración se puede expresar por las siguientes igualdades (para el caso de las áreas se realiza la integración desde 0 hasta Q_{ia} y Q_{iSa} según corresponda):

$$H_a = H_{Sa} \therefore A_a \pm B_a Q_a - C_a Q_a^2 = A_{Sa} \pm B_{Sa} Q_a - C_{Sa} Q_a^2 \therefore S_a = S_{Sa} \quad (43a)$$

$$S_a = S_{Sa} \therefore A_a Q_{ia} \pm \frac{B_a}{2} Q_{ia}^2 - \frac{C_a}{3} Q_{ia}^3 = A_{Sa} Q_{iSa} \pm \frac{B_{Sa}}{2} Q_{iSa}^2 - \frac{C_{Sa}}{3} Q_{iSa}^3 \quad (43b)$$

$$\eta_a = \eta_{Sa} \therefore G_a Q_a - H_a Q_a^2 = G_{Sa} Q_a - H_{Sa} Q_a^2 \therefore S_a = S_{Sa} \quad (44a)$$

$$S_a = S_{Sa} \therefore \frac{G_a}{2} Q_{ia}^2 - \frac{H_a}{3} Q_{ia}^3 = \frac{G_{Sa}}{2} Q_{iSa}^2 - \frac{H_{Sa}}{3} Q_{iSa}^3 \quad (44b)$$

$$P_a = P_{Sa} \therefore D_a \pm E_a Q_a \mp F_a Q_a^2 = D_{Sa} \pm E_{Sa} Q_a \mp F_{Sa} Q_a^2 \therefore S_a = S_{Sa} \quad (45a)$$

$$S_a = S_{Sa} \therefore D_a Q_{ia} \pm \frac{E_a}{2} Q_{ia}^2 \mp \frac{F_a}{3} Q_{ia}^3 = D_{Sa} Q_{iSa} \pm \frac{E_{Sa}}{2} Q_{iSa}^2 \mp \frac{F_{Sa}}{3} Q_{iSa}^3 \quad (45b)$$

donde: H_a : carga adimensional de la bomba (adim.); H_{Sa} : carga adimensional desarrollada por la combinación de las bombas en serie (adim.); η_a : eficiencia adimensional de la bomba (adim.); η_{Sa} : eficiencia adimensional de las bombas trabajando en serie (adim.); P_a : potencia adimensional de la bomba (adim.); P_{Sa} : potencia adimensional desarrollada por la combinación de las bombas en serie (adim.); S_a : áreas definidas por las curvas características adimensionales de una bomba (adim.); S_{Sa} : áreas definidas por las curvas características de la combinación de las bombas en serie en su forma adimensional (adim.); Q_{ia} : caudal de inflexión adimensional (gasto adimensional de la bomba para el cual se obtiene la máxima carga, potencia y eficiencia adimensional) (adim.) y Q_{iSa} : caudal de inflexión adimensional de la combinación de las bombas en serie (gasto adimensional para el cual se obtiene la máxima carga, potencia y eficiencia adimensional del conjunto) (adim.).

A partir de las ecuaciones (43)-(45) se pueden definir las siguientes equivalencias:

$$A_a = A_{Sa}; B_a = B_{Sa}; C_a = C_{Sa}; D_a = D_{Sa}; E_a = E_{Sa}; F_a = F_{Sa}; G_a = G_{Sa}; H_a = H_{Sa} \quad (46)$$

Aceptando los principios del comportamiento hidráulico del trabajo de bombas en serie se tienen las siguientes expresiones:

$$H_{Sd} = n_b H_d; \quad Q_{Sd} = Q_d; \quad \eta_{Sd} = \eta_d; \quad P_{Sd} = n_b P_d \quad (47)$$

Trabajando con las ecuaciones (40), (42), (46) y (47) se procede entonces a determinar las relaciones entre los coeficientes característicos de las curvas de comportamiento hidráulico de una bomba y los representativos de las curvas características del acoplamiento en serie.

$$\begin{aligned} A_S &= n_b A; \quad B_S = n_b B; \quad C_S = n_b C; \quad D_S = n_b D; \quad E_S = n_b E; \\ F_S &= n_b F; \quad G_S = G; \quad H_S = H \end{aligned} \quad (48)$$

CONCLUSIONES

- La metodología propuesta, denominada Método de las Áreas, permite determinar los coeficientes de la expresión analítica de la combinación de bombas iguales en serie a partir de establecer la relación que existe entre las áreas bajo la curva característica considerada de una bomba y la resultante del acoplamiento de n bombas en serie.
- Se demuestra que la expresión analítica de la curva característica resultante de la combinación en serie está en función de n (número de bombas). Así mismo, se calculan los coeficientes de las curvas de comportamiento hidráulico de una bomba y los representativos de las curvas del acoplamiento en serie, en el caso de curvas adimensionales.
- Esta metodología también puede ser aplicada para calcular las nuevas expresiones analíticas de las curvas características de una bomba cuando cambia la velocidad de rotación de su impelente. Este caso será presentado en un próximo artículo.

REFERENCIAS

- Cabrera E.** (2009). “Ingeniería hidráulica aplicada a los sistemas de distribución de agua”, Editorial Unidad Docente Mecánica de Fluidos, Universidad Politécnica de Valencia, t. 1 y 2, 3^{ra} edición, ISBN 8461339495, Valencia, España.
- Fernández P.** (2000). “Bombas centrífugas y volumétricas” (monografía), Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética, Universidad de Cantabria, Cantabria, España. Extraído de: http://www.ing.una.py/pdf_material_apoyo/bombas-centrifugas-y-volumetricas.pdf en julio 2017.
- Grundfos Pumps** (2004). “Pump handbook” (monografía), Copenhagen, Dinamarca. Extraído de: http://net.grundfos.com/doc/webnet/mining/_downloads/pump-handbook.pdf en julio de 2017.
- KSB Pumps** (2005). “Selecting centrifugal pumps” (monografía), 4th edition, Frankenthal, ISBN 3-00-017841-4, Alemania.

- Martínez Y.** (2009). “Selección de bombas rotodinámicas para el diseño hidráulico de estaciones de bombeo”, Tesis de maestría, Facultad de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cujae), La Habana, Cuba.
- Martínez Y.** (2011). “Metodología para el diseño hidráulico de las estaciones de bombeo para acueducto”, Tesis de doctorado, Instituto Superior Politécnico “José Antonio Echeverría” (Cujae), La Habana, Cuba.
- Pérez A.** (2006). “Estudio del comportamiento de las bombas rotodinámicas”, Trabajo de diploma, Instituto Superior Politécnico Julio Antonio Mella (ISPJAM), Santiago de Cuba, Cuba.
- Pérez Franco D.** (1999). “Máquinas Hidráulicas Rotodinámicas”, Editorial ENPSES, ISBN 03887-3887, La Habana, Cuba,.
- Pérez Franco D.** (2012). “Estaciones de Bombeo”, Editorial Félix Varela, ISBN 978-959-07-1379-8, La Habana, Cuba.
- Riaño F. y Lorence M.** (1986). “Algunas consideraciones sobre el punto de operación de una bomba y su determinación matemática”, Ingeniería Hidráulica, 7 (1): 86-92, ISSN 0253-5696, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cujae), La Habana, Cuba,.
- Turiño, I. M.** (1996). “Procedimientos metodológicos para el diagnóstico operacional en sistemas de bombeo mediante modelos matemáticos”, Tesis de doctorado, Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Central de las Villas Marta Abreu (UCLV), Santa Clara, Cuba.